انتشارات دانشگاه تهران
۱۳۲۲

کاشانی نامه

تحقیق در احوال و آثار

غیاث‌الدّین جمشید کاشانی

ریاضی‌دان و مُنجّم بزرگ ایرانی

نگارش
ابوالقاسم قربانی

انتشارات دانشگاه تهران

۱۳۲۲

تحقیق در احوال و آثار غیاث‌الدین جمشید کاشانی

نگارش

ابوالقاسم قربانی

۱۳۵۰

انتشارات دانشگاه تهران

شمارهٔ ۱۳۲۲

از سلسله انتشارات دانشکدهٔ ادبیات و علوم انسانی

دربارهٔ متفکران بزرگ ایران

ناشر: سازمان انتشارات و چاپ

تاریخ انتشار: اردیبهشت ۱۳۵۰

تعداد چاپ: یکهزار نسخه

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ دانشگاه

بها: ۱۶۰ ریال

کاشانی نامه

تحقیق در احوال و آثار

غیاث‌الدّین جمشید کاشانی

ریاضی‌دان و منجّم بزرگ ایرانی

نگارش

ابوالقاسم قربانی

مقدمه

پیشرفت وتوسعهٔ شگفت‌انگیز علوم در کشورهای اسلامی از نیمهٔ دوم قرن دوم هجری (قرن هشتم میلادی) آغاز شد ودر اواخر قرن پنجم (یازدهم میلادی) به‌اوج کمال رسید و درطی این سه‌قرن‌ونیم آثار بدیع دررشته‌های مختلف دانش به‌وجود آمد. از اوایل قرن‌سیزدهم با همان سرعت حیرت آوری که رو‌به‌ترقی رفته‌بود راه انحطاط پیش گرفت و درمدت سه‌قرن قوس نزولی را پیمود تا بالاخره در اواخر قرن نهم (پانزدهم میلادی) تقریباً از حرکت باز ایستاد و ازآن پس، اگر چه‌بحث درافکار گذشتگان و شرح‌وحاشیه‌نویسی برآثار آنان ادامه داشت و گاگاه‌دانشمندان ومحققانی در رشته‌های مختلف علوم اسلامی پیدا می‌شدند، روح‌علمی رفته‌رفته در کشورهای اسلامی به‌انحطاط گرایید وآن نیروی خلاقه که در قرنهای پیش موجب پیدایش آن همه‌شاهکارهای علمی شده بود از میان‌رفت. ریاضیات و نجوم هم از این‌قاعدهٔ کلی مستثنی نبود جزاینکه دراوایل قرن نهم (پانزدهم‌میلادی) آثار ریاضی نفیسی‌توسط ریاضیدان عالی قدر ایرانی **غیاث‌الدین‌جمشید‌کاشانی** پدید آمد که از ممتاز ترین تألیفات علمی دورهٔ اسلامی است. دراین کتاب شرح‌احوال و آثار این ستاره قدراول آلمان علم ایران را خواهید خواند واز نتیجهٔ تحقیقات دانشمندان اروپایی دربارهٔ وی تااندازه‌ای آگاه خواهید شد.

* * *

مطالب این کتاب‌درطی سالیان دراز، به‌صورت یادداشتهای‌پراکنده، فراهم آمده بود. یکسال پیش از این، دانشمند گرامی جناب‌آقای دکتر سیدحسین نصر، استاد و رئیس محترم دانشکدهٔ ادبیات وعلوم انسانی دانشگاه تهران، که خود صاحب‌تحقیقات وتألیفات متعدد و گرانبها هستند، از آنجا که به‌پژوهشهای‌محققان مغرب زمین دربارهٔ آثار استادغیاث‌الدین‌جمشیدوقوف داشتند و وجود کتابی‌رادربارهٔ

احوال وآثار وی به زبان فارسی لازم می‌دانستند ، نویسنده این سطور را به تدوین آن یادداشتها و تألیف کتاب حاضر تشویق فرمودند و وسایل چاپ وانتشارآن را فراهم آوردند واینک وظیفه خودمی‌دانم که از صمیم قلب ازلطف ومحبت ایشان سپاسگزاری نمایم . همچنین از دوست گرانمایهٔ عزیز جناب‌آقای‌احمد آرام که این کتاب را قبل از چاپ شدن مطالعه کردند و مرابه‌بسیاری از نکات دقیق و مهم وتصحیحات لازم واقف ساختند ممنون وسپاسگزارم .

* * *

چون شرح احوال وآثار ریاضیدانانی‌را که نامشان در کتاب‌حاضرآمده‌درتألیف دیگر خود موسوم به«ریاضیدانان ایرانی» به‌تفصیل نوشته‌ام از تکرار آنها دراین کتاب خودداری کرده‌ام . تاآنجا که میسربوده است‌منبع ومأخذ هرمطلب را بانشان اختصاری کافی در ذیل‌صفحات کتاب‌آورده‌ام وفهرست‌منابع و مآخذ را درآخر کتاب ثبت کرده‌ام ودر واقع بیشتر مطالب کتاب حاضر از منابع مذکور گرفته شده‌است .

از آنجا که این نخستین کتابی است که به‌زبان فارسی دربارهٔ آثار ریاضی **غیاث‌الدین‌جمشید** وبحث‌درافکار علمی او نوشته شده، بسیار ممکن‌است که ، با همهٔ کوششهای پیگیری که به‌عمل‌آورده‌ام، ندانسته‌مرتکب‌خطاها واشتباهاتی‌شده‌باشم بنابراین «**ازکسی که به‌این‌کتاب نظر می‌افکند استدعا دارم‌که از ضعف عبارات‌آن مرامعذور دارد واگرلغزشی درآن روی داده برمن خرده نگیرد ؛ چه من به‌عجز و تقصیر خود مقرم وبه‌سستی بیان و نوشتهٔ خود معترفم**[1]»

---

۱ ـ ازمقدمهٔ مفتاح‌الحساب چاپی ، صفحهٔ ٤

فهرست مندرجات

موضوع | صفحه

موضوع	صفحه

تصحیح

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۲۱	۱۳	ایندا	ایندیا
۲۶	اول	تخلیص	تلخیص
۲۸	اول پاورقی	رسائه	رسالهٔ
۵۷	۱۰	ضرب کردن	ضرب کردن
۶۷	۲	۱۹۱	۱۱۹
۶۹	ماقبل آخر از پاورقی	بقع	یقع
۸۱	۱۱	هورنو	هورنر
۱۰۱	سوم پاورقی	سخن	نحن
۱۴۷	اول پاورقی	جمیها	جمیعا
۱۹۶	۴	تضیف	تصنیف
۱۹۷	۲	مسائل	مسائل
۲۰۰	۹	القاسالی	القاسانی
۲۰۳	۳	تفاصل	تفاضل
۲۳۴	اول پاورقی	والمنجون	والمنجمون
۲۵۳	۲	ابن فنفود	ابن قنفوذ

بخش اول

زندگینامهٔ کاشانی[1]

آنچه دربارهٔ زندگی کاشانی می‌دانیم

۱ ـ نام ولقب ونسبتش چنانکه خود وی بارها در مقدمهٔ تألیفاتش نوشته[2]: **جمشیدبن‌مسعودبن محمود طبیب کاشانی ملقب به‌غیاث‌الدین** است و در این کتاب برای رعایت اختصار غالباً وی را **کاشانی** خواهیم نامید[3]. بدواً اطلاعاتی را که دربارهٔ زندگانی **کاشانی** داریم به‌تفصیل شرح می‌دهیم و سپس بااستناد به‌آنها خلاصهٔ زندگینامهٔ وی را می‌نویسیم .

۲ ـ نخستین کسی که درایران شرح احوال وآثار **کاشانی** رابه‌تفصیل بیان کرد و نامهٔ تاریخی مهمی راکه وی از سمرقند به پدرش نوشته بوده باتعلیقات‌مفیدمنتشر ساخت آقای **محمد محیط طباطبائی** بود[4] .

---

۱ ـ در ذیل صفحات این کتاب به‌آثار وتألیفات نویسندگان و محققان به‌وسیلهٔ نام آنان وگاهی نیز توسط عنوان کتاب مورد بحث ارجاع شده است. فهرست الفبائی و اسامی مؤلفان و عنوان کامل هریک از آثار آنان را بانشانهٔ اختصاری درپایان همین کتاب‌آورده‌ایم. مثلاً وقتی‌می‌نویسیم : (← کندی Z : ص ۱۲۷ ش ۲۰) یعنی رجوع کنید به‌شمارهٔ ۲۰ صفحهٔ ۱۲۷ کتاب «تاریخچهٔ زیجهای اسلامی» تألیف ا. س. کندی که عنوان انگلیسی و سایر مشخصات‌آن بانشانهٔ‌اختصاری «کندی Z» درپایان همین کتاب تحت عنوان «فهرست منابع و مدارك» آمده است .

۲ ـ مثلاً در مقدمهٔ «مفتاح‌الحساب» و در مقدمهٔ «رسالهٔ محیطیه» وجزآنها .

۳ ـ مؤلفان و دانشمندان غربی ، به‌پیروی از سنت عربی اسلامی ، وی را «الکاشی» (al - kashi) می‌نامند .

۴ ← **محیط** : غیاث‌الدین ـ **محیط** : نامه ـ **محیط** : تعلیقات .

۳ ـ پژوهندگان و دانشمندان غربی مانند **سوتر**(۱) و **لوکی**(۲) و **کنِدی**(۳) و **یوشکویچ**(٤) و دیگران نیز در بارهٔ وی وآثارش تحقیقاتی به‌عمل آورده‌اند. باوجود این،اطلاعاتی که از زندگانی **کاشانی** دردست داریم چندان‌زیاد نیست. خوشبختانه نسخه‌های خطی عده‌ای از تألیفات وی که بعضی از آنها به‌خط دست‌خود اوست، و بعداً دربارهٔ آنها به‌بحث خواهیم پرداخت،ازگزند حوادث محفوظ مانده و می‌توان از روی آنها تاریخهای زیر را به‌دست آورد. **کاشانی** :

در ۱۲ ذیحجهٔ ۸۰۸ (۲ژوئن۱٤۰٦)(٥) درکاشان رصد کرده است(٦).

همچنین در ۲٦ نوامبر ۱٤۰٦م(۱٥ جمادی‌الثانیهٔ ۸۰۸) و ۲۲ مهٔ ۱٤۰۷م (۲۰ ذیحجهٔ ۸۰۹) درکاشان به‌رصد پرداخته است(٦).

در ۲۱ رمضان ۸۰۹ (اول مارس ۱٤۰۷) تألیف رسالهٔ «سلم‌السماء» را در کاشان به‌پایان رسانیده است(۷).

در ۸۱۳ (۱٤۱۰/۱۱) یاپیش از آن تاریخ کتاب «مختصر درعلم هیأت» را به‌نام شاهزاده **سلطان‌اسکندر** نوشته است(۸).

در ۸۱٦(۱٤۱۳/۱٤) «زیج خاقانی» را نوشته وبه‌الغ‌بیک اهدا کرده‌است.

در ذیقعدهٔ ۸۱۸ (ژانویهٔ ۱٤۱٦) «رسالهٔ آلات‌رصد» را به‌نام **سلطان‌اسکندر**

---

۱ ← **سوتر** M : ص ۱۷۳ ش ٤۲۹ .

۲ ← **لوکی** R ، ص ٤

۳ ← **کنِدی** P ، ص ۱ تا ۸

٤ ← **یوشکویچ** G ، ص ۲۳۷

٥ ← دراین کتاب برای رعایت اختصار مثلاً هرجانوشته‌ام: ۱۲ ذیحجهٔ ۸۰۸(۱٤۰٦) ، مقصود دوازدهم ماه‌ذیحجه از سال۸۰۸ هجری است که مطابق است باسال۱٤۰٦ میلادی. همه‌جا ابتدا سال هجری و سپس سال میلادی را بین پرانتز در دنبال آن نوشته‌ام جز در مواردی که سال هجری قمری را «ه. ق» وسال میلادی را «م» نامیده‌ام

٦ ← **کنِدی** P : ص ۱ و ۱۸۸

۷ ← ش ٥۳

۸ ← ش ٦۹

نوشته است[۱].

در ذیحجهٔ ۸۱۸ (فوریهٔ ۱٤۱٦) متن رسالهٔ «نزهةالحدائق» رانوشته است[۲]

در ۷ شعبان ۸۲٤ (۷ اوت ۱٤۲۱) تألیف کتاب «تلخیص المفتاح» راکه خلاصهٔ کتاب «مفتاح الحساب» خود اوست به پایان رسانیده است[۳].

در اواسط ماه شعبان سال ۸۲۷ (ژوئن ۱٤۲٤) تألیف «رسالهٔ محیطیه» را را تمام کرده است.

درسوم جمادیالاولی ۸۳۰ (۲ مارس ۱٤۲۷) کتاب «مفتاح الحساب» راکه از سالها قبل مشغول تألیف و تکمیل آن بوده در سمرقند به**الغ بیک** اهدا کرده است[٤].

بالاخره **کاشانی** در ۱۹ رمضان ۸۳۲ (۲۲ ژوئن ۱٤۲۹) درخارج شهرسمرقند درگذشته است[٥].

نامهٔ کاشانی به پدرش

٤ ـ نامه‌ای از **کاشانی** دردست است که از سمرقند به پدر خود نوشته وحاوی مطالب مهمی است و می‌توان از آن اطلاعاتی دربارهٔ وی کسب کرد.

۵ ـ یک نسخه از این نامه درکتابخانهٔ مدرسه عالی سپهسالار در جزو مجموعه‌ای به‌شمارهٔ ٤۲/٤۱۹۲ موجود است[٦] ویک نسخه از آن نیز درکتابخانهٔ مجلس شورای ملی در جزو مجموعه‌ای محفوظ می‌باشد[۷]. آقای **محیط طباطبائی** متن این نامه را از روی نسخهٔ خطی مذکور ونسخهٔ دیگری که در «زنبیل» **معتمدالدوله**

---

۱ ← ش ٦٦ ۲ ← ش ۵۹

۳ ← ش ٤۱ - (بنابراین تألیف «مفتاح الحساب» را پیش از این تاریخ شروع کرده ولی چنانکه بعداً خواهیم دید تا سال ۸۳۰ (۱٤۲۷) مشغول تکمیل و تصحیح آن بوده است) ← ش ۷۸.

٤ ← ش ۷۸ ۵ ← ش ۱۷

٦ ← **فهرست سپهسالار**، بخش ٤ ص ۷۳ ش ۲٤

۷ ← **فهرست مجلس**، ج ۱۵ ص ۲۰۲ (مجموعهٔ ۵۱۳۸/۱٤۲)

نقل شده است با تعلیقات مفیدی در سال ۱۳۱۹ ه.ش. به‌چاپ رسانیده است[۱]. دکتر **کندی** در نوشتن شرح احوال **کاشانی** از این نامه و سایر مقالات آقای **محیط طباطبائی** استفاده کرده[۲] وبعداً نیز خود متن‌نامه را بانگلیسی‌ترجمه کرده است[۳]. قسمتهایی از این نامه را **صاییلی** درکتاب «رصدخانه دراسلام» به‌انگلیسی ترجمه و تفسیر کرده است[٤].

٦ ـ این نامهٔ **کاشانی** تاریخ ندارد و درآغاز آن فقط نوشته شده است: «این عبودیت‌سابع (= هفتم) ذی‌قعدة‌الحرام‌شرف‌اصدار یافت[٥]». آقای **محیط‌طباطبائی** از روی بعض قرائن حدس زده است که این نامهٔ تاریخی‌درحدود سال ۸۲۷ ه.ق. نوشته شده است[٦]. آنچه قطعی به‌نظر می‌رسد این است که نامهٔ مذکور بعدازماه رمضان سال ۸۲٤ ه.ق نوشته شده زیرا **کاشانی** در آن نامه از «شرح تجنیس الحساب» نام می‌برد[۷] واین شرح در سلخ ماه رمضان سال ۸۲٤ هق به‌پایان رسیده است[۸] (بعداً خواهیم دید که‌نامهٔ مذکور به‌احتمال‌قوی‌درهفتم ذیقعدهٔ ۸۲٤ ه. ق نوشته شده‌است ← شمارهٔ۳ همین کتاب).

---

۱ ← **محیط** : نامه ـ **محیط** : تعلیقات

۲ ← **کندی** P ، ص ۱ ، ۳ ، ۷ و مواضع دیگر از مقدمهٔ آن‌کتاب

۳ ← **کندی** L

٤ ← **صاییلی** O ، ص ۲۹ ، ۱۰٥ ، ۱۹۷ ، ۱۹۸ ، ۲۱۳ ، ۲٥۰ ، ۲٦۲ ، ۲٦۳ ، ۲٦۸ ، ۲٦۹ ، ۲۷٤ ، ۲۷۷ ، ۲۷۸ ، ۲۸۱ ، ۲۸۲ ، ۲۸٤ تا ۲۸۸

٥ ← **محیط** : نامه ، ص ۹

٦ ← **محیط** : غیاث‌الدین ، ص ۳ و ۸

۷ ← **محیط** : نامه ، ص ۱۰ سطر ۹

۸ ـ متن این کتاب موسوم است به «التجنیس فی‌الحساب» تألیف **سراج‌الدین ابوطاهر محمدبن عبدالرشید سجاوندی** و شرحش موسوم است به «منهاج معانی التجنیس» از **مسعودبن‌محتز** معروف‌به **نظامی مشهدی** که آن را درسمرقند در سلخ ماه رمضان ۸۲٤ ه.ق تمام کرده است ← (**همائی** : خیامی نامه ، ج ۱ ص ۷۱)

دراینکه نامهٔ مذکور در اوایل شروع ساختمان رصدخانهٔ سمرقند نوشته شده است تردیدی نمی‌توان داشت ، چه مهمترین مسأله دربنای ساختمان رصدخانه تعیین خط نصف‌النهار موضع رصد است و **کاشانی** دراین باره به‌پدر خود چنین نوشته است : «دیگر ، روزی که تسویهٔ زمین جهت استخراج نصف‌النهار درموضع رصد[۱] شده وآن را بنایان فاخر کرده بودند ، بعداز آن خشک شده بود ، رفته بودیم که نصف‌النهار پیدا کنیم، خواستیم که امتحان کنیم[۲] ...» ونیز نوشته‌است: «اکنون اکثری از عمارات برآورده شده ، قریب پانصدتومان خشت پخته وکچ بکار رفت و یک ذات‌الحلق تمام شد ویکی دیگر هم درکار است و بعضی آلات دیگر هم ... در دست دارند[۳]» .

از مضمون‌عبارات‌فوق کاملاً پیداست که **کاشانی** نامهٔ‌خود را دراوایل‌شروع ساختمان رصدخانهٔ سمرقند به‌پدر خود نوشته است و بعداً دراین‌باره گفتگو خواهیم کرد .

۷ ـ ضمناً نامهٔ **کاشانی** شامل نکاتی است که‌می‌توان تا اندازه‌ای خلق وخوی وی و رابطهٔ اورا با **الغ‌بیک** از مضمون آنها به‌دست آورد : **کاشانی** می‌نویسد : «از تحسین های حضرت سلطنت‌پناهی آنست که هیچ هفته نگذرد که بعضی‌دوستان باین بنده نرسانند که بندگی حضرت سلطنت پناهی امشب یا امروز چنین و چنان نکته‌ها فرمودند . امثال آنها : مستحضر است ، بغایت خوب می‌داند و از همه این بهتر می‌داندواز قاضی[٤] مستحضرتر و پرمایه‌تر است و دراین فن پرذهن‌تر ، چیزی که او به‌ده روز مشکل درمی‌یابد ، مولانا غیاث‌الدین برفور یا در روز درمی‌یابد ، جمیع اقسام‌این‌فن رامی‌داند ونیزمردنیک وسلیم‌القلب است، هرکس‌ازجنس‌موالی و

۱ ـ مقصود از «موضع رصد» رصدخانه است .

۲ ← **محیط** : نامه ص ۱۲ سطر آخر وآغاز صفحهٔ ۱۳

۳ ← محیط : نامهٔ ، ص ۱٦

٤ ـ مقصود «**موسی‌بن محمدبن محمود قاضی‌زادهٔ رومی**» است .

غیره که پیش ما آید ، همین که ما اورا اندك تربیتی کردیم خود را نگاه نداشتندوبا مردم جنگ می‌کردند و فضولی‌پا پیش می‌گرفتند ، مولانا غیاث‌الدین با وجودیکه انواع تربیت وعنایت در حق‌او فرمودیم و دائماً به‌شرف مجاورت و مکالمه مستعد است دراین مدت هرگز باکسی نزاع نکرد و نه‌او ازکس و نه کس از او گله کرد و به‌سخنهای مردم درآوردن و به‌عرض‌رسانیدن جهت طمع دخل نکرد و نیکومعاش دارد و امثال هذه به کرات فرمودند ... بحمدالله‌والمنه که بعداز چندین مدت که درکنج خانه به‌سربرده بود چون بیرون آمد ، به‌چنان شهری عظیم ، برچنین مردی هنرمند وبه‌حضرت‌جهان‌پادشاهی دانا ... رسید به‌یمن‌عنایت ازلی وسعادت‌لم‌یزلی و برکت همت آن خداوند چنان زیست که درآن حضرت مستحسن افتاد».

تاریخ رفتن کاشانی به سمرقند

۸ ـ چون درنسخه‌ای خطی از «زیج خاقانی» تألیف **کاشانی** که در سال ۸۱۶(۱۴۱۳/۱۴) نوشته شده و موجود است[۱] ، **کاشانی** این زیج را به‌**الغ‌بیک** تقدیم کرده است ؛ آقای **محیط طباطبائی** و دیگران از این رو حدس زده‌اند که باید **کاشانی** در فاصلهٔ بین سالهای ۸۱۲ و ۸۱۶ ه.ق. به‌سمرقند رفته باشد[۲] ؛ ولی به‌دلایل زیر این‌حدس درست نیست :

۹ ـ اولاً **کاشانی** در ذیقعدهٔ سال ۸۱۸ ه.ق. رسالهٔ «آلات‌رصد» را به‌فارسی به‌نام **سلطان‌اسکندر**[۳] تألیف کرده و در مقدمهٔ آن نوشته است ، «این رساله‌ایست در شرح آلات رصد که برحسب فرمان پادشاه اسلام ، فرنفرمای هفت اقلیم ظل‌الله فی‌الارضین قهرمان‌الماء والطین ،سطان‌السلاطین فی‌العالم، ملجأ وملاذ بنی‌آدم، القایم

۱ ← ش ۳۴

۲ ← **محیط** : غیاث‌الدین ، ص ۷ سطر اول

۳ ـ **کندی** نوشته است که این‌اسکندر شخص دیگری جز «اسکندربن قرایوسف» نمی‌تواند باشد (**کندی** P ، ص ۲) برای آگاهی یافتن از احوال اسکندربن قرایوسف‌رجوع کنید به‌لغت‌نامهٔ دهخدا حرف‌الف صفحه ۲۳۶۱ ستون دوم .

بامورالمسلمین و ولی‌امیرالمؤمنین، الواثق بالله‌الاکبر، السطان اسکندر خلدالله‌تعالی ملکه وخلافته و سلطانه و ابدعلی‌العالمین بره واحسانه درسلک تحریر آمد ».

و نمی‌توان قبول کرد که **کاشانی** درسال ۸۱۸ در سمرقند نزد **الغ‌بیک** بوده و رسالهٔالات رصد خود را آن هم با عبارات و عناوین‌والقاب فوق به **سلطان‌اسکندر** تقدیم کرده باشد .

۱۰ ـ ثانیاً تقدیم«زیج خاقانی» درسال ۸۱۶ هـ.ق . به‌**الغ‌بیک** دلیل‌آن‌نیست که **کاشانی** درآن سال به‌سمرقند رفته باشد . چه‌ممکن است که **کاشانی** این کتاب را برای شناساندن خود به‌**الغ‌بیک** به‌اوتقدیم کرده واز کاشان به‌سمرقند فرستاده باشد، و از کجا معلوم است که تقدیم همین کتاب موجب اطلاع یافتن **الغ‌بیک** از میزان معلومات و شخصیت علمی **کاشانی** نشده و بعداً نظر به‌احتیاجی که به‌وجود وی‌حس می‌کرده اورا به‌سمرقند نخوانده باشد ؟

۱۱ ـ ثالثاً چنانکه گفتیم **کاشانی** دراوایل شروع بنای‌رصدخانهٔ سمرقند درآنجا بوده و از برخی از عبارات نامه‌ای که به‌پدرش نوشته‌می‌توان استنباط کرد که‌فاصلهٔ زمانی ورود او به‌سمرقند و نوشتن‌نامه‌به‌پدرش زیاد نبوده است . چه وی‌مانندشخص تازه واردی جریان کارهای خود را به‌پدرش گزارش می‌دهد . مثلاً می‌نویسد(۱) :

«غرض که‌چون بنده همچنین جایی درآمد وهر کس چشم وگوش بر گماشتند که معلوم کنند که این کس درچه‌نصاب است ، هرچند روزبندگی حضرت سلطنت پناهی درحلقهٔ درس حاضر می‌شود و چون حاضر شد درس ریاضیات مقدم می‌دارند و این بنده‌هم‌حاضر شد . یکی از امتحان طلبه این است که هر کس‌به‌حلقهٔ درسی‌درآید غافل است از آنکه چه‌مسأله درمیان خواهد بود و اصحاب مدرسه آن را به‌تجدید مطالعه بلیغ کرده‌اند ، چون آغاز بحث می‌شد هربار به‌عنایةالله تعالی و یمن همت‌آن خداوندی این بنده دخل کاملی کرده چنانکه چند چیز که ایشان را از مطالعه معلوم نشده گفته واعتراضات وارده برسخن ایشان کرده و نکته های لطیفه بیرون آورده که

۱ ← **محیط** : نامه ، ص ۱۰

همه حیران مانده‌اند. پیش از آمدن این بنده اشکالی چند ایشان را واقع شده بود و درمیان یکدیگر انداخته و هیچکس بیرون آوردن آن نتوانسته است. مثلاً خواسته‌اند که اسطرلابی که یک گز قطرآن باشد بسازند... همهٔ مستخرجان فرمودند که به‌اتفاق عمل کنند... ودرمانده بودند. ریاضیدانان رااشارت فرموده بودند که به‌قوت قوانین هندسی تحقیق و تصحیح آن بکنند. هیچکس نتوانسته‌است که تحقیق آن بکند... هرچند عمل می‌کرده‌اند و فکر درآن می‌نموده‌اند راست نمی‌آمده. چون این بنده رسید در روز این مسأله در حضرت سلطنت پناهی پیش‌آورده‌اند واین بنده در فور وهم در مجلس تصحیح یکی[۱] از آن کرده و منشأ غلط ایشان بیان کرده و تطبیق کلام زیج براین بیان کرد» و نمی‌توان قبول کرد که **کاشانی** مثلاً در سال ۸۱۶ ه.ق. به‌سمرقند رفته باشد و پس‌از چندین‌سال (به‌قول آقای **محیط طباطبائی** درسال ۸۲۷ یعنی بعداز متجاوز از ده سال) این مطالب را به پدرش نوشته باشد.

بنابرآنچه گذشت بدون تردید کاشانی تا سال ۸۱۸ ه.ق. هنوز به‌سمرقند نرفته بوده وهنگامی که‌نامهٔ مذکور را به‌پدر خود نوشته‌مدت زمان زیادی از ورود او به‌سمرقند نگذشته بوده است.

۱۲ ـ ازطرف دیگر مدرکی در دست داریم که به‌استناد آن می‌توان گفت که به‌احتمال‌قوی **کاشانی** تا سال ۸۲۴(۱۴۲۱) هنوز درکاشان‌بوده است: یک‌نسخهٔ خطی ازکتاب «تلخیص‌المفتاح» **کاشانی** جزو مجموعهٔ شمارهٔ ۳۱۸۰ کتابخانهٔ ملی‌ملک‌موجوداست[۲] و درپایان آن نوشته‌شده: وقدتم‌فی‌السابع‌من‌شعبان‌المعظم لسنة‌اربع و عشرین و ثمانمائة‌هجریه[۳]» و بعداز عبارت مذکور مطالب زیر نیز در

۱ ـ ظاهراً: نیکی

۲ ـ این نسخهٔ نفیسی است به خط معین‌الدین کاشانی و شامل نسخهٔ خطی «مفتاح الحساب» و «رسالهٔ جیب درجهٔ واحده» نیز می‌باشد.

۳ ـ یک نسخهٔ خطی دیگر نیز از «تلخیص‌المفتاح» درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران موجود است که درپایان آن همین تاریخ ۸۲۴ ه.ق. آمده- (**فهرست دانشگاه**، ج ۳ ص ۸۶۸)

پایان‌آن نسخه به همان خط متن دیده می‌شود: «تمت‌الکتابه بحمدالله و حسن توفیقه علی یدالعبد **معین‌بن‌محمدالمنجم‌الکاشی** احسن‌الله احواله فی‌منتصف‌الشهرالمذکور للسنةالمذکوره بمدنیة کاشان عمرهاالله تعالی»

پس معلوم می‌شود که کاشانی تألیف کتاب «تلخیص‌المفتاح» را در هفتم‌ماه شعبان سال ۸۲۴ (۷ اوت ۱۴۲۱) به پایان رسانیده و **معین‌بن‌محمدمنجم‌کاشی** استنساخ نسخهٔ مذکور را در نیمهٔ ماه شعبان همان سال یعنی پس‌از هشت روز در **کاشان** تمام کرده است. ازطرف دیگرکاتب نسخهٔ مذکورکه نام‌کاملش **عبدالرزاق‌بن‌محمد ملقب به معین‌المنجم** است[۱] همان **معین‌الدین‌کاشانی** است که بنابه قول چند مورخ به اتفاق **غیاث‌الدین جمشید** به سمرقند رفته[۲] و آقای **محیط طباطبائی** وی را خواهرزادهٔ **غیاث‌الدین جمشید** معرفی کرده‌است[۳]. بادرنظر گرفتن‌مطالب فوق و این که **کاشانی** نامهٔ‌مذکور را بعدازرمضان ۸۲۴ هنگامی که

۱ـ چه در انتهای نسخهٔ خطی کتاب «مفتاح‌الحساب» که با کتاب «تلخیص‌المفتاح» مذکور جزو همان مجموعهٔ ۳۱۸۰ کتابخانهٔ ملی ملک است نوشته شده «کتب‌العبد عبدالرزاق‌بن‌محمد الملقب بمعین‌المنجم‌الکاشی فی رجب سنه ثلثین و ثمانمائة هجریة ببلده سمرقند صانهاالله».

۲ ← **لب‌التواریخ**، ص ۱۹۲: «میرزا الغ بیک‌بن میرزا شاهرخ ... درسنه ۸۲۳ باتفاق مولانا صلاح‌الدین موسی قاضی‌زادهٔ رومی و مولاناعلی قوشچی که شارح تجرید است و مولانا غیاث‌الدین جمشید و مولانا **معین‌الدین** که ایشان را ازکاشان به سمرقند آورده بودند درشمال سمرقند مایل به مشرق رصدبست» ـ **حبیب‌السیر**، ص ۳۴ ج ۴: «درزمان دولتش (= الغ بیک) جمعی کثیر ازآن طایفه (= علما) در بلدهٔ سمرقند مجتمع گشته بودند و ... ازآن جمله یکی مولانا غیاث‌الدین جمشید که درعلم هیأت و ریاضی و فن نجوم عدیل و نظیر نداشت و در وقتی که میرزا الغ بیک رصد می‌ساخت آن جناب به اتفاق مولانا معین‌الدین کاشی ... به تمشیت آن مهم می‌پرداختند» (و نیز رجوع کنید به صفحهٔ ۲۹ همان جلد ازکتاب حبیب‌السیر).

۳ ← **محیط**: غیاث‌الدین، ص ۶.

هنوز مدت زمان زیادی از ورود او به سمرقند نگذشته بوده[۱] نوشته است ، چنین به نظر می‌رسد که **غیاث‌الدین جمشید و معین‌الدین کاشی** هردو در نیمهٔ شعبان سال ۸۲٤ ه.ق. درکاشان بوده و بعداً باهم به سمرقند رفته‌اند **و کاشانی** نامهٔ مذکور را در هفتم ذیقعدهٔ همان سال از سمرقند به پدرش نوشته است.

۱۳ـ اکنون باید دید که این فرض با تاریخ بنای رصدخانهٔ سمرقند سازگار هست یانه ، زیرا دیدیم که **کاشانی** در اوایل شروع بنای رصدخانه در سمرقند بوده است[۲].

۱٤ـ در تاریخ شروع بنای رصدخانه سمرقند بین مورخان اختلاف است : **خواند میر** در «حبیب‌السیر»[۳] این‌تاریخ را سال **۸۲٤** ه . ق . و **میر خواند** در «روضة‌الصفا»[٤]سال ۸۲٥ ه.ق.و **یحیی‌بن‌عبداللطیف قزوینی** در«لب‌التواریخ»[٥] سال ۸۲۳ ه . ق . و **عبدالرزاق سمرقندی** در «مطلع‌السعدین»[٦] سال ۸۲۳ ه . ق . وحتی **رکن‌الدین پسر شرف آملی** که معاصر **الغ‌بیک** و **کاشانی** بوده در مقدمهٔ «زیج جامع سعیدی»[۷] در سال ۸۳۰ نوشته‌اند.

۱٥ـ خواندمیر که تاریخ ۸۲٤ ه . ق . را برای اتمام مدرسه و خانقاه سمرقند بیان کرده، نوشته است[۳] : «و درسنهٔ ۸۲٤ آن‌خسرو بی مانند (=الغ بیک) در وسط بلدهٔ فاخرهٔ سمرقند مدرسهٔ رفیع و خانقاهی منیع بنا نموده باتمام رسانید و بسیاری از مزارع وقری و مستغلات فوایدانتما برآن بقاع وقف گردانید. و همچنین فرمان داد استادکاران در آن بلدهٔ فردوس نشان رصدی بنیان نهادند و بطلمیوس

۱ ← ش ٦ همین کتاب .
۲ ← ش ٦ همین کتاب.
۳ ← **حبیب‌السیر** ، ج ٤ ص ۲۹ .
٤ ← **محیط** ، غیاث‌الدین ، ص ۸.
٥ ← **لب‌التواریخ** ، ص ۱۹۲ .
٦ ← **محیط** : غیاث‌الدین ، ص ٥ .
۷ ← **محیط** : غیاث‌الدین ، ص ٤ و ۸ .

ثانی مولانا **غیاث‌الدین جمشید** و جامع کمالات انسانی مولانا **معین‌الدین کاشی** در ترتیب آن بناسعی و اهتمام دادند».

از سیاق عبارات فوق چنین برمی‌آید که درسال ۸۲٤ هـ . ق . بنای مدرسه و خانقاه سمرقند به پایان رسیده و در همان سال **الغ‌بیک** فرمان بنای رصدخانه را صادر کرده است.

۱٦ـ با درنظر گرفتن همهٔ مطالبی که گذشت ، ملاحظه می‌شود که ، بدون آنکه به اشکال اساسی برخوریم ، می‌توانیم فرض کنیم که **الغ‌بیک** پس‌از پایان یافتن ساختمان مدرسه وخانقاه سمرقند ، نظر به‌احتیاجی که برای‌شروع بنای‌رصدخانه به **غیاث‌الدین جمشید** داشته [۱] ، درسال ۸۲٤ هـ . ق . او را به سمرقند دعوت کرده و بنای رصدخانه مطابق با نقشه‌ای که **کاشانی** تهیه کرده[۲] دراواخر همان سال شروع شده است.

تاریخ فوت کاشانی

۱۷ـ تاریخ درگذشت **کاشانی** در چند محل به صراحت ذکر شده است : اولاً در مجموعهٔ خطی ریاضی شماره ۱۷۹۰ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران در صفحهٔ آخر نسخهٔ «مفتاح‌الحساب» که جزو آن مجموعه است نوشته شده : « وفات مولانای اعظم مولانا غیاث‌الدین طیب‌الله مضجعه در اول روز چهارشنبه نوزدهم شهر رمضان‌المبارك سنهٔ ۸۳۲ هجریه خارج بلدهٔ سمرقند بموضع رصد»[۳] و عین

۱ـ کاشانی در نامهٔ خود به پدرش نوشته است : « پیش‌ازآمدن این بنده اشکالی چند ایشان را واقع شده بود ودرمیان یکدیگر انداخته و هیچکس بیرون آوردن آن نتوانسته است (**محیط** : نامه ، ص ۱۰).

۲ـ کاشانی به پدرش نوشته است : «و بنای عمارت رصد به وجهی که‌این بنده شرح داده فرمودند (**محیط** : نامه ص ۱۱ دو سطر آخر).

۳ ← **مصاحب** : حکیم خیام ، ص ۳۰۰.

این عبارت در صفحهٔ اول نسخهٔ خطی «زیج خاقانی» که در دیوان هند (انیدیا افیس) به شمارهٔ ۴۳۰ محفوظ می‌باشد نیز آمده‌است[۱]. ثانیاً، در نسخهٔ خطی زیج ناقصی که به شمارهٔ ۲۰۱ در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی محفوظ است[۲] و شرحش را بعداً خواهیم دید، عبارت زیر آمده‌است: «توفی المولی المخدوم الاعظم غیاث الملة و الدین جمشید، طیب‌الله مضجعه و طاب ثراه و جعل الجنة مأواه و مثواه، و هو مصنف هذا الزیج فی صباح یوم الاربعاء تاسع عشر من رمضان سنة ۸۳۲ هجریة خارج بلدة سمرقند بموضع رصد[۳]».

بنابراین تردیدی نیست که **کاشانی** در صبح روز چهارشنبهٔ نوزدهم ماه رمضان سال ۸۳۲ (۲۲ ژوئن ۱۴۲۹) در خارج شهر سمرقند درگذشته است[۴].

نکته‌ای دربارهٔ درگذشت کاشانی

۱۸- امین احمد رازی در «تذکرهٔ هفت اقلیم» نوشته است[۵]: «آورده‌اند که چون میرزا **الغ بیک** گورکان همت بر بستن رصد گماشت مولانا **غیاث‌الدین جمشید** را با اعزاز و احترام طلب داشته مصاحبتش را ملازم گرفت، وچون مولانا درآداب ورسوم خدمت پادشاهان بسیار عاری افتاده بود، هرآینه آنچه آداب وروش ملازمت

۱ ← **کندی** P، ص ۱۷.

۲ ← **فهرست رضوی**، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۳۳.

۳ ← **محیط**: غیاث‌الدین، ص ۹.

۴- برای رفع شبهه باید متذکر شوم که آقای مدرس رضوی در مقدمهٔ «ترجمهٔ میزان الحکمه» (چاپ تهران ۱۳٤٦ ه . ش) تاریخ تولد **کاشانی** را ۸٤۰ ه . ق . و تاریخ وفات او را ۹۱٤ ه . ق . نوشته است و این هردو اشتباه است.

۵ ← **تذکرهٔ هفت اقلیم**: چاپ تهران ج ۲ ص ٤٦۰ (افتادگی دارد) - نسخهٔ خطی کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران پشت برگ ۳۵۷.

بوده باشد ازو به وقوع نمی‌پیوست ، و جناب میرزا ازاین رهگذر همواره مکدر بوده اظهار آزردگی می‌فرمود ، اما بنابرآنکه معاملهٔ زیج بی‌وجود مولاناسمت اختتام نمی‌پذیرفت، بالضروره در تجرع سخنان‌تلخ مولانا صابربوده همیشه برزبان می‌آورده که این مهم کی صورت انصرام یابد تا من ازاطوار و گفتار ناهنجار مولانا **جمشید** خلاص شوم . **و بعضی باعث فوت مولانارا از جانب میرزا الغ‌بیک می‌دانند .**

۱۹ـ از طرف دیگر با آنکه ، چنانکه بعداً خواهیم دید[1]،«رسالهٔ وتروجیب» **کاشانی** بدون شک‌وجود داشته،واودراین رساله جیب یک درجه را با دقت فراوانی حساب کرده و در مقدمهٔ کتاب «مفتاح الحساب» که آن را به **الغ‌بیک** تقدیم کرده از آن رساله نام برده و به تألیف آن تفاخر کرده است ، معلوم نیست چرا **الغ‌بیک** در مقدمهٔ زیج خود که بعداز فوت **کاشانی** به پایان رسیده نوشته است : «و جیب یک درجه که بنای عمل جدول جیب وظل برآنست الی یومنا هیچکس به طریق برهان استخراج نکرده وهمهٔ حکماتصریح کرده‌اند به آنکه طریق عمل به استخراج آن نیافته‌اند و حیلت کرده‌اند تا به تقریب به دست آورده‌اند و ما بعنایةالله و منه به طریق برهان ملهم شدیم و در بیان آن علی‌حده کتابی پرداختیم» .

شخصیت علمی کاشانی

۲۰ـ برای شناختن شخصیت‌علمی **کاشانی** بهتر دیدم که به جای تکراربعضی توصیفات مبهم و معمولی از قبیل «بطلمیوس ثانی» و «بی‌شبیه و نظیر زمان خود» و «سلطان المهندسین» و «افضل المهندسین» ، که در کتابهای فارسی دربارهٔ وی آمده است ، قسمتی ازآنچه را ریاضیدانان و محققان مغرب زمین در وصف آثار **کاشانی** نوشته‌اند دراینجا بیاورم :

۱- رجوع کنید به شمارهٔ ۲۰۷ (بخش پنجم) کتاب حاضر.

۲۱ـ دانشمند خاورشناس و ریاضیدان آلمانی **پاول لوکی**[۱] **نخست** در سال ۱۹٤٤ میلادی کتابی در شرح و تفسیر قسمتی از «مفتاح الحساب» **کاشانی** نوشت[۲] و سپس در ۱۹٤۹ میلادی «رسالهٔ محیطیهٔ» او را به زبان آلمانی ترجمه و تفسیر کرد[۳]، و کتاب اول (متأسفانه بعداز مرگش) در ۱۹۵۱ م و کتاب دوم در ۱۹۵۳ میلادی به چاپ رسید.

۲۲ـ اینک وصف «رسالهٔ وترو جیب» **کاشانی** را از زبان **لوکی** بشنوید[٤]: «**هانکل**[۵] در کتاب تاریخ ریاضیات[٦]» خود شرح میدهد که چگونه یک منجم و ریاضیدان مسلمان (= کاشانی) در قرن پانزدهم میلادی جیب یک درجه را از روی جیب سه درجه بادقت فراوان حساب کرده، وچگونه معادلهٔ درجهٔ سوم مربوط به آن مسأله را تشکیل داده و با روش استادانه‌ای آن را حل کرده است. **هانکل** می گوید که این روش زیبای حل معادلات عددی از حیث دقت و ظرافت دست کمی از روشهای تقریبی که از زمان **ویت**[۷] به بعد در مغرب زمین متداول شده است ندارد. بعداز روش استخراج جذر و کعب که در اصل با آن شباهتهایی دارد **این نخستین روش محاسبهٔ تقریبی است که در تاریخ ریاضیات بدان برمی‌خوریم ...** به حق می‌توان این روش را بدیعترین و جالب‌ترین روشهایی دانست که در همهٔ نوشته های (ریاضی) اسلامی وجود دارد. **مخترع چنین روش تحسین آمیزی یک نفر ایرانی بود که در نیمهٔ اول قرن پانزدهم (میلادی) در انجمن دانشورانی که نزد**

۱ـ Paul Luckey

۲ـ **لوکی** R .

۳ـ **لوکی** L .

٤ ← **لوکی** R، ص ۱.

۵ـ H. Hankel (۱۸۷۳—۱۸۳۹ م).

٦ ← **هانکل** G، ص ۲۸۹ تا ۲۹۳.

۷ـ Francois Viète (۱٦۰۳—۱۵٤۰).

الغ بیک گرد آمده بودند می‌زیسته و در آثارش خود را غیاث‌الدین جمشید فرزند مسعود فرزند محمود طبیب کاشانی نامیده است» .

۲۳ـ سپس **لوکی** دربارهٔ سایرآثار **کاشانی** می‌نویسد(۱) : «درنتیجهٔ پژوهشهایی که من تاکنون در یک قسمت از آثار وی ، که خوشبختانه قسمت اعظم آنها در کتابخانه‌های شرق و غرب موجود است ، به عمل آورده‌ام ، **او را ریاضیدانی شناخته‌ام هوشمند ومخترع ونقاد و صاحب‌افکار عمیق و واقف برآثار ریاضیدانان سلف که به خصوص در فن محاسبه و به‌کار بستن روشهای تقریبی متبحر و چیره دست بوده است .** اگر رسالهٔ محیطیهٔ او به دست ریاضیدانان معاصر وی که در مغرب زمین می‌زیستند رسیده بود،از آن پس مردم مغرب زمین از بعضی منازعات و و تألیفات شرم‌آور در بارهٔ اندازه‌گیری دایره (= محاسبهٔ عددپی) بی‌نیاز می‌شدند. اگر نظریهٔ واضح و روش عملی وی در مورد شناساندن کسرهای اعشاری انتشار یافته بود یک قرن و نیم بعدازوی **ویت** و **استون** و **بورگی**(۲) در اروپا مجبور نمی‌شدند که نیروی فکری و عملی خود را برای از نو یافتن آن کسرها به کاراندازند» (پایان نوشتهٔ **لوکی**) (و رجوع کنید به‌شمارهٔ ۲۰۳ کتاب حاضر،درآنجاعقیدهٔ **لوکی** را دربارهٔ رسالهٔ محیطیهٔ **کاشانی** خواهید یافت) .

۲٤ـ یوشکویچ در کتاب «تاریخ ریاضیات در قرن وسطی» در بارهٔ « مفتاح الحساب» **کاشانی** می‌نویسد(۳) : «مفتاح الحساب کتابی است درسی،در بارهٔ ریاضیات مقدماتی ، که استادانه تألیف شده و مؤلف آنچه را که مورد نیاز طبقات مختلف خوانندگان آن کتاب می‌تواند بود درنظر گرفته است . این کتاب از حیث فراوانی و تنوع مواد و مطالب و روانی بیان و سلاست کلام تقریباً در همهٔ آثار (ریاضی)

۱ـ **لوکی** R ، ص ۲ .

۲ـ Viète ، Stevin ، Bürgi .

۳ ← **یوشکویچ** G ، ص ۲۳۷ .

قرون وسطی یگانه است». و نیز دربارهٔ «رسالهٔ محیطیهٔ» **کاشانی** می‌نویسد[۱] : «این رساله که در بارهٔ محاسبهٔ عدد پی (π) نوشته شده اثری است نفیس و درخشنده در فن محاسبهٔ خطاها که ، نه تنها از حیث نتیجهٔ آن که مشتمل برهفده رقم اعشاری دقیق عدد پی می‌باشد ، بلکه همچنین از جهت ظرافت بیان و سادگی روش تخمین و انتخاب ماهرانه ازبین مقادیر تقریبی موجود، نیز جالب توجه است».

۲۵ـ کندی در بارهٔ **کاشانی** می‌نویسد[۲] : «در باب میزان معلومات و مقام علمی وی در تاریخ علم می‌توانیم برپایهٔ استوارتری (نسبت به شرح احوال او) گفتگو کنیم. پیش از هرچیز باید گفت که **کاشانی** محاسبی زبر دست بود و در این فن مهارت خارق‌العاده داشت ، و شاهد این مدعا این است که وی با اعداد شصتگانی خالص به آسانی و روانی حساب می کرد ، کسرهای اعشاری را اختراع نمود ، روش تکراری[۳] را درحساب به‌طور کامل وپیگیر به کار می‌بست ، با چیره دستی مراحل محاسبه را طوری تنظیم می‌نمود که بتوان حداکثرخطارا پیش‌بینی کرد و درهرمقام صحت اعمال را مورد امتحان قرار می‌داد . آلت «طبق المناطق» که وی اختراع کرد نمایندهٔ کاملترین پیشرفتی است که برای این دسته از افزارهای نجومی حاصل شده است. به خصوص این تنها افزار فنی (مکانیکی) بود که تعیین عروض سیارات را امکانپذیر می‌ساخت. اگر هم دربارهٔ عملی بودن نتایجی که از این آلت حاصل می‌شود با قید احتیاط بیندیشیم ، در باب مهارتی که از جهت هندسی در آن به کار رفته است شک و تردید نمی‌توان داشت.

۲٦ـ سپس **کندی** می‌افزاید[٤]: «چنین به نظر می‌رسد که **کاشانی** در کار رصد و نجوم فنی کاملاً صاحب صلاحیت بوده ودراین باره نه نسبت به زمان خود پیشی

---

۱ ← **یوشکویچ** G ، ص ۳۱۳ .

۲ـ **کندی** P ، ص ۸ .

۳ـ Iterative algorism .

٤ ← **کندی** P ، ص ۹ .

داشته و نه از آن عقب‌تر بوده است . همین حکم را می‌توان دربارهٔ هیأت وی (= نظریه وی دربارهٔ حرکت سیارات) اظهار داشت. او بدون قید وشرط این عقیده را که در المجسطی نیامده است می‌پذیرد : «ماه و سیارات سفلی و خورشید وسیارات دیگر در حول زمین که ثابت‌فرض می‌شود روی‌نوارهای پیوسته‌ای‌درحرکت‌هستند» و از این رو اندازه‌گیری فواصل سماوی ، مثلاً فاصلهٔ متوسط زحل از زمین ، را با واحدهای زمینی امکان پذیر می‌پندارد. پس معاصران وی که او را «بطلمیوس ثانی» نامیده‌اند[۱] زیاد سخاوت به خرج داده‌اند. اما نسل بعدی هم که یکی‌از ریاضیدانان زمان خود را « غیاث‌الدین جمشید ثانی » خوانده‌اند نیز نسبت به آن ریاضیدان زیاد خوشبین بوده‌اند[۲]» .

خلاصهٔ زندگینامهٔ کاشانی

۲۷ـ **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** ریاضیدانی عالیقدر و محاسبی ماهر و منجمی زبر دست و مؤلفی توانا و مخترع آلات دقیق رصد بود و به حق می‌توان او را از برجسته‌ترین ریاضیدانان‌دورهٔ اسلامی دانست. وی از حدود سال ۸۰۸ (۱٤۰٦) تاپایان عمرش یعنی ۸۳۲(۱٤۲۹) فعالیت‌علمی داشت ، و دراین مدت به‌تصنیف و تألیف رسالات و کتب ریاضی ونجومی پرداخت ،که مهمترین‌آنها «زیج خاقانی» و «مفتاح‌الحساب» و «رسالهٔ محیطیه» و «رسالهٔ و تروجیب» است(شرح آنها خواهد آمد) ، و آلت «طبق‌المناطق» را برای تعیین عروض کواکب اختراع کرد وکتاب

۱ـ اشاره است به اینکه خواندمیر در تاریخ حبیب‌السیر نوشته است : « بطلمیوس ثانی مولانا غیاث‌الدین جمشید و جامع کمالات‌انسانی مولانا معین‌الدین کاشی ... (**حبیب السیر** : ج ٤ ص ۲۱).

۲ـ اشاره است به‌اینکه ملاعلی محمد اصفهانی‌پدر حاج‌نجم‌الدوله«غیاث‌الدین جمشید ثانی» لقب داشته (**محیط** : تعلیقات ، ص ٦۰).

«نزهةالحدائق» را در شرح آن نوشت. از جملهٔ شاهکارهای ریاضی وی، چنانکه بعداً خواهیم دید، این است که او نخستین مخترع کسرهای اعشاری است و عدد پی (π) یعنی نسبت محیط دایره به قطر آن را با دقتی که تقریباً تا صد و پنجاه سال بعداز وی در دنیا بی‌رقیب ماند حساب کرد، و جیب زاویهٔ یک درجه را با روش تکراری حل نوعی معادلهٔ درجهٔ سوم به وجه بسیار جالب توجهی که تا زمان وی سابقه نداشت به دست آورد. **کاشانی** در حدود سال ۸۲۴ (۱۴۲۱) به دعوت **الغ بیک** از کاشان به سمرقند رفت، و مدیررصدخانهٔ سمرقند و مورد احترام **الغ بیک** و ریاضیدانان دیگری که در سمرقند می‌زیستند بود، وبنابه قول **بیرجندی**(۱) «اصل رصد سمرقند از آثار طبع لطیف اوست». **کاشانی** در ۱۹ رمضان ۸۳۲ (۱۴۲۹) در خارج شهر سمرقند درگذشت.

۱ ← **بیرجندی**: شرح زیج، ص ۴۰.

بخش دوم

تألیفات کاشانی

۲۸- در این بخش فقط از تألیفات ریاضی و نجومی **کاشانی** گفتگو خواهیم کرد[۱].
این تألیفات عبارتند از:

یک - مفتاح الحساب - رجوع کنید به بخش سوم کتاب حاضر[۲].

دو - رسالهٔ محیطیه - رجوع کنید به بخش چهارم کتاب حاضر[۲].

سه - رسالهٔ وتر و جیب - رجوع کنید به بخش پنجم کتاب حاضر[۲].

چهار - زیج خاقانی در تکمیل زیج ایلخانی (به فارسی).

۲۹- تألیف این زیج را **کاشانی** در سال ۸۱۶ (۱۴/۱۴۱۳) به پایان رسانیده و آن را به **الغ بیک** اهدا کرده است. این زیج نخستین تألیف مفصل **کاشانی** است و چنین شروع می‌شود: «حمد و سپاس بی قیاس حضرت خالقی را که با ید ابداع و قدرت ... اما بعد چنین گوید مؤلف این کتاب اقل عبادالله تعالی جمشید بن مسعود بن محمود ... که مدتی بود که در اقسام علمی و عملی ریاضیات اجتهاد می‌نمود ...»

۳۰- «زیج خاقانی» در شش مقاله است به این شرح: مقالهٔ اول در معرفت تواریخ مشهور (مشتمل بر مقدمه و چهار باب) - مقالهٔ دوم در معرفت جیب و سهم و ظل و

۱- برای کسب اطلاع از سایر تألیفات کاشانی و از جمله «تفسیر القرآن» که به وی منسوب است رجوع کنید به کتاب «ریحانة الادب» جلد ۳ صفحهٔ ۱۶۵ شمارهٔ ۲۷۳ و لغت‌نامهٔ دهخدا حرف «غ» مقالهٔ «غیاث‌الدین جمشید» و به خصوص ذیل صفحهٔ ۳۸۹.

۲- چون «مفتاح الحساب» و «رسالهٔ محیطیه» و «رسالهٔ وتر و جیب» چه از لحاظ تاریخ ریاضیات و چه از جهت مطالبی که در آنها مندرج است اهمیت زیاد دارند در سه بخش جداگانهٔ این کتاب آنها را مورد بحث قرار می‌دهیم.

میل و مطالع (و ذکر طول و عرض بلدان) وآنچه بدان تعلق دارد (مشتمل برمقدمه و دو باب) ـ مقالهٔ سوم در معرفت مواضع کواکب (در طول و عرض) و توابع آن (مشتمل برمقدمه و دو باب) ـ مقالهٔ چهارم دراستخراج سایر قسی و خطوط مشهوره (مشتمل برمقدمه و دو باب) ـ مقالهٔ پنجم در استخراج طالع از معلومات مختلفه (مشتمل برمقدمه و دو باب) ـ مقالهٔ ششم در باقی اعمال نجومی (که آن تسییرات است مشتمل برمقدمه و دو باب).

چنانکه ملاحظه می‌شود ، هریک از این شش مقاله به استثنای مقالهٔ اول ، مرکب از سه قسمت است.

قسمت اول مقدمه‌ای است در توضیح معانی اصطلاحات متعدد فنی که در آن مقاله به کار رفته است و قسمت دوم شرح اعمال و قسمت سوم دلایل صحت این اعمال است.

۳۱ـ کاشانی درمقدمهٔ این زیج از**خواجه نصیرالدین طوسی** با تجلیل و احترام یاد می کند ، ولی از اشتباهاتی که در «زیج ایلخانی» روی داده انتقاد می‌نماید. هدف اصلی کاشانی ازتألیف «زیج خاقانی» تصحیح اشتباهات و تکمیل «زیج ایلخانی» بوده است ، و خود در مقدمهٔ مفتاح الحساب می گوید(۱) : «همهٔ جدولهای زیج ایلخانی را از نو با دقیقترین عمل استخراج کردم ، و زیج موسوم به خاقانی را در تکمیل «زیج ایلخانی» وضع کردم ، و آنچه را که از کارهای منجمان استنباط کردم و در زیج دیگری وجود نداشت با برهانهای هندسی در آن گرد آوردم».

۱ ← **مفتاح** ، ص ۲ ـ عین عبارت مفتاح الحساب این است: «کما استأنفت استخراج جمیع جداول الزیج الایلخانی بأدق عمل و وضعت الزیج المسمی بالخاقانی فی تکمیل الزیج الایلخانی وجمعت فیه جمیع ما استنبطت من اعمال المنجمین مما لا یأتی فی زیج آخر مع البراهین الهندسیة» ـ عبارت «بأدق عمل و وضعت الزیج المسمی بالخاقانی فی تکمیل الزیج الایلخانی» در دیباچهٔ «مفتاح الحساب» چاپی از قلم افتاده ولی در همهٔ نسخه های خطی معتبر آن کتاب دیده می‌شود.

۳۲ـ اگر از فواید دیگر این زیج چشم بپوشیم و فقط آن‌را ازلحاظ اصطلاحات فنی متعدد فارسی و عربی که در آن به کار رفته است مورد دقت قرار دهیم ، این زیج یکی از مهمترین کتابهای علمی فارسی به شمار است.

۳۳ـ لوکی می‌نویسد[۱] : «می‌توان زیج خاقانی را مبدأ و پایهٔ مقدماتی زیج **الغ‌بیک** دانست ، و همچنین روش محاسباتی را که دراین زیج به کار رفته است مبنای نوشتجات بعدی **کاشانی** دربارهٔ مثلثات و پایهٔ «مفتاح‌الحساب» وی به شمار آورد. بنابراین بررسی مطالب این زیج باید جالب توجه باشد».

نسخه های خطی موجود زیج خاقانی

۳۴ـ یک نسخهٔ خطی از زیج خاقانی در استانبول (ایا صوفیا ، نسخهٔ شمارهٔ ۲۶۹۲) موجود است که درسال ۸۱۶ (۱۴۱۳/۱۴)نوشته شده و در آن دست‌رفته و پر از زیر نویسیها و قلم خوردگیها و تصحیحات است . **کراوزه** به همین دلیل حدس زده که ممکن است‌این نسخه نسخهٔ پیش نویس خود**کاشانی** بوده باشد[۲].

۳۵ـ نسخهٔ خطی دیگری نیز از زیج خاقانی درکتابخانهٔ دیوان هند (ایندا افیس) به شمارهٔ ۴۳۰ (Ethé 2232) موجود است که در سال ۹۰۵ (۱۴۹۹) استنساخ شده است.

۳۶ـ کندی نوشته است : «اینکه درفهرست فارسی ایند یا افیس[۳] (ج ۱ صفحه ۱۲۲۰) نوشته شده که «زیج خاقانی» نخستین روایت از«زیج جدید سلطانی» (=زیج گورکانی=زیج الغ بیک) است اشتباه می‌باشد[۴].

۱ ← **لوکی** R ، ص ۱۲.

۲ ← **کراوزه** S ، ص ۵۱۰ ش ۴۲۹/۴.

۳ ← Ethé , H. , Cat. of Pers. Mss. in the Library of the India Office, Vol. 1 , Oxford , 1903 , p. 1220

۴ ← **کندی** Z ، ص ۱۲۷ ش ۲۰.

۳۷ـ محقق محترم آقای **دانش پژوه** در برخی از مجلدات فهرست کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران و سایر فهرست‌ها این زیج را با «زیج الغ بیک» اشتباه کرده و برخی از نسخه های خطی «زیج الغ بیک» را «زیج خاقانی» نامیده است(۱) ولی اخیراً خود او متوجه این اشتباه شده و البته در موقع مناسب تصحیح خواهد کرد.

۳۸ـ به عقیدهٔ **کندی** نسخهٔ خطی شمارهٔ ۱۰۲ کتابخانهٔ استان قدس رضوی(۲) که در ۱۰۵ برگ است فقط قسمتی ازاین زیج است(۳). این مسأله باید مورد دقت بیشتری قرار گیرد(٤).

۳۹ـ کندی خلاصهٔ بسیار جامع و سودمندی از مطالب مهم «زیج خاقانی» را از روی نسخهٔ موجود دردیوان هند فراهم آورده(٥) وعلاوه براین همهٔ زیج‌مذکور را به زبان انگلیسی ترجمه و شرح کرده و وعده داده است که در آینده آن را منتشر کند(٦).

٤۰ـ این نکته را هم ناگفته نگذاریم که **ستوری** در کتاب «تاریخ تألیفات

۱ـ زیجهای شمارهٔ ۳۰۵۳ و ٤٤٦۱ و ۱۸۸۵ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران و زیج شمارهٔ (ج ـ ۵۸) دانشکدهٔ حقوق تهران و زیج شمارهٔ ٥٤ کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات تهران وزیج شمارهٔ ۱ر۲۲۸ ب دانشکدهٔ الهیات، همه نسخه های زیج الغ بیک (= زیج جدید سلطانی = زیج گورکانی) هستند نه «زیج خاقانی در تکمیل زیج ایلخانی» ← (**فهرست دانشگاه**، ج ۱۰ ص ۱۹۹۵ وج ۱۳ ص ۳٤۱۶ و فهرست دانشکدهٔ حقوق ص ۱۳۳ و فهرست سوم ادبیات، ص ۱۹).

۲ ← **فهرست رضوی**، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۳۳ شمارهٔ ۱۰۲.

۳ ← **کندی** Z، ص ۱۲۷ ش ۲۰.

٤ ← رجوع کنید به شمارهٔ ٤۹ کتاب حاضر.

٥ ← **کندی** Z، ص ۱٦٤ بند ۱٥ تا صفحهٔ ۱٦٦.

٦ ← **کندی** Z، ص ۱۲۷ سطر آخر و ص ۱۲۸ سطر اول.

فارسی[۱]» نام «زیج خاقانی» را در ضمن تألیفات **الغ بیگ** آورده و این بدون تردید اشتباه است.

پنج - تلخیص المفتاح فی علم الحساب (به عربی).

٤۱- این کتاب، چنانکه از عنوانش پیداست، خلاصهٔ کتاب «مفتاح الحساب» است و **کاشانی** تألیف آن را چنانکه از بعضی نسخه‌های خطی موجود آن استنباط می‌شود در هفتم ماه شعبان سال ۸۲٤ (۷ اوت ۱٤۲۱) به پایان رسانیده است[۲]. «تلخیص الفتاح» دارای سه فصل وتقریباً شامل یک هشتم مطالب «مفتاح الحساب» است، و از مقالهٔ سوم مفتاح که مربوط به طریق حساب منجمان است مطلبی درآن نیامده.

نسخه های خطی موجود تلخیص المفتاح

٤۲- در ایران چند نسخهٔ خطی از «تلخیص المفتاح» می‌شناسیم: یک نسخهٔ خطی از آن جزو مجموعهٔ شمارهٔ ۸٦۸ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران و یک نسخه نیز جزو مجموعهٔ شمارهٔ ۹۰۷ همان کتابخانه موجود است[۳].

٤۳- دو نسخهٔ دیگر از «تلخیص المفتاح» در کتابخانهٔ ملی ملک هست[٤]. یکی در مجموعهٔ شمارهٔ ۳۱۸۰ به خط **معین الدین کاشی** و دیگری به شمارهٔ ۳۰۷۹

٤٤- دو نسخهٔ خطی نیز از «تلخیص المفتاح» در کتابخانهٔ مجلس شورای ملی موجود است[۵] (به شماره‌های ۲۷۸٦/۹ و ۲۸۲۸/۱) و یک نسخهٔ خطی از آن

۱ ← **ستوری** P، ج ۲ قسمت اول ص ٦۷ ش ۱۰٤.

۲ ← ش ۱۲ کتاب حاضر.

۳ ← **فهرست دانشگاه**، ج ۳ ص ۸٦٦ تا ۸٦۸.

٤- شخصاً دیده‌ام.

۵ ← **فهرست مجلس**، ج ۱۰ ص ۳۳ ش ۹ و ص ۱٤۹ ش ۱.

نیز در استانبول (جارالله شمارهٔ ۱٤٦۰) هست[1] و چند نسخهٔ خطی دیگر از آن نیز در خارج از ایران وجود دارد[2].

٤٥ـ نسخهٔ خطی «رسالة فی الحساب» که در جلد دوم فهرست نسخه های خطی و عکسی کتابخانهٔ دانشکدهٔ الهیات ومعارف اسلامی (ص ۵۲) معرفی شده به احتمال قوی نسخه‌ای از «تلخیص المفتاح» است.

آغاز و فصلهای تلخیص المفتاح

٤٦ـ «تلخیص المفتاح» چنین شروع می‌شود: «الحمدالله الواحد الاحد الفرد القدیم الصمد الذی الاه غیرمحدوده... اما بعد فان احوج خلق الله تعالی الی غفرانه جمشید بن مسعود بن محمود الطبیب الکاشانی الملقب بغیاث، احسن الله احواله، یقول لمافرغت من تحریر کتابی المسمی بمفتاح الحساب، فانتخبت منه هذا المختصر فیمالا بد منه للمبتدیین و سمیته **تلخیص المفتاح** و جعلته مشتملاً علی ثلثین فصلاً مستعیناً بالله وحده العزیز».

٤۷ـ ترجمهٔ فارسی عنوانهای سی فصل «تلخیص المفتاح» به این شرح است:

۱ـ در چگونگی نوشتن اعداد و مراتب آنها.

۲ـ در تضعیف (ضرب کردن در ۲).

۳ـ در تنصیف (تقسیم کردن بر ۲).

٤ـ در جمع.

٦ـ در ضرب.

۷ـ در تقسیم.

۸ـ در استخراج جذر.

۱ـ **کراوزه** S، ش ۵۱۰.

۲ ← **بروکلمان** G_2، ص ۲۷۳ ش ٤ و **بروکلمان** S_2، ص ۲۹۵ ش ۵.

۹- در میزانها (امتحان اعمال).
۱۰- در تعریف کسرها و چگونگی نوشتن آنها.
۱۱- در شناختن تداخل و تشارك و تباین.
۱۲- در تجنیس.
۱۳- در رفع.
۱٤- در گرفتن کسرهای مختلف از یک مخرج (مخرج مشترك گرفتن).
۱۵- در تضعیف کسرها.
۱٦- در تنصیف کسرها.
۱۷- در جمع کسرها.
۱۸- در تفریق کسرها.
۱۹- در ضرب کسرها.
۲۰- در تقسیم کسرها.
۲۱- در استخراج جذر (کسرها).
۲۲- در تحویل کسر از یک مخرج به مخرج دیگر.
۲۳- در مساحت سطوح مستوی که محیطآنها (مرکب از قطعه) خطهای راست است.
۲٤- در مساحت دایره و قطعه دایره.
۲۵- در مساحت سطوح مستدیر مانند استوانه و مخروط.
۲٦- در اندازهگیری حجم اجسام.
۲۷- در آنچه برای شروع مسائل (معادلات) ششگانهٔ جبری لازم است.
۲۸- در ذکر مسائل (معادلات) ششگانهٔ جبری.
۲۹- در خطأین.
۳۰- در ایراد بعضیاز قواعد که محاسب به آنها نیازمند است.

شرح تخلیص‌المفتاح

٤۸- بر کتاب «تلخیص‌المفتاح» شرحهایی نوشته شده است ، چنانکه حاجی خلیفه در «کشف‌الظنون[۱]» نوشته است : «مفتاح‌الحساب لغیاث‌الدین جمشید . . . الفه‌لالوغ بک‌ثم اختصره وسماه تلخیص‌المفتاح و قد شرح بعضهم هذاالتلخیص» .

آقا بزرگ طهرانی درکتاب «الذریعه الی تصانیف‌الشیعه[۲]» نوشته است که نسخه‌ای خطی از شرح «تلخیص‌المفتاح» کاشانی را موسوم به «تنویرالمصباح فی‌شرح تلخیص‌المفتاح» در نجف نزد شخصی (موسوم به شیخ علی قمی) دیده‌است، و آن را شرحی مزجی و مبسوط ازهمهٔ کتاب «تلخیص‌المفتاح» بعرفی کرده و نوشته است که این شرح خطبه و دیباچه ندارد[۳] .

نسخه‌ای از یک «شرح تلخیص‌الفتاح» به عربی درکتابخانهٔ مجلس شورای ملی موجود است که خطبه ندارد و نا تمام است[٤] .

شش - زیج تسهیلات (فارسی ؟) .

٤۹- نام این زیج را کاشانی خود در مقدمهٔ «مفتاح‌الحساب» در شمار تألیفات خود آورده است[٥] ولی تاکنون نسخه‌ای از آن با این نام دیده یا شناخته نشده است . آقای **محیط طباطبائی** حدس زده است که شاید نسخهٔ خطی‌زیج شمارهٔ ۱۰۲ کتابخانهٔ آستان قدس رضوی[٦] که به فارسی است همین زیج تسهیلات باشد[۷] .

---

۱ - چاپ استانبول ج ۲ ص ۱۷٦۰ باب‌المیم .
۲ ← **الذریعه** ، ج ٤ ص ٤۷۱ ش ۲۰۹۳ .
۳ - و نیز رجوع کنید به **الذریعه** ، ج ٤ ص ٤۲۸ ش ۱۸۸۸ .
٤ ← **فهرست مجلس** ، ج ۱۰ ص ۳٤ ش ۱۱ .
٥ ← **مفتاح** ، ص ۲ : «و وضعت‌ایضا زیج‌التسهیلات و جداول شتی» .
٦ ← **فهرست رضوی** ، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۳۳ .
۷ ← **محیط** : غیاث‌الدین ، ص ۲۰ تا ۲۲ - **لغت‌نامه** : حرف « غ » ص ۳۸۷ ستون سوم به بعد .

اما این نسخه نسخهٔ ناقصی است مشتمل بر فصل ششم از مقالهٔ چهارم یک کتاب که در اول آن نوشته شده است : «فصل ششم در تسهیل تقویم کواکب». **کندی** این نسخه را که در ۵ ۱ برگ است قسمتی از «زیج خاقانی» به شمار آورده است[۱]

۵۰ـ این مطلب درخور توجه است که برگهای ۱۴۲ تا ۱۵۶ نسخهٔ خطی «زیج خاقانی» موجود در دیوان هند[۲] شامل جداولی است برای تسهیل تقویم کواکب ، و در آنجا مطالب مفصلی در شرح این جدولها نوشته شده است و گذشته از این ،جدولهای مذکور در آن زیج ، به خلاف زیجهای دیگر ، در فصلی جداگانه قرار دارد . **کندی** از این رو حدس زده است که شاید **کاشانی** قبل از تألیف «زیج خاقانی» این جدول و شرح آنها را تهیه و تدوین کرده و آنها را در رسالهٔ جداگانه‌ای نوشته و آن را «زیج تسهیلات» نامیده باشد .

هفت ـ رسالهٔ سلم‌السماء = رسالهٔ کمالیه (عربی) .

۵۱ـ عنوان کامل این رساله درنسخهٔ چاپی آن (شرحش خواهدآمد) چنین است: «الرسالة الموسومة بسلم‌السماء فی استخراج ابعاد الارض و السماء من‌السیارات السبعة و الثوابت و افلاکها». موضوع این رساله ، چنانکه از عنوانش پیداست، استخراج بعدهای سیارات و قطرهای آنها واندازهٔ اجرام آنها می‌باشد که **کاشانی** آن را به قول خود برای رفع اشکال متقدمین در ابعاد و اجرام نوشته است (← ذیل ش ۱ ص ۲۹)وچنین شروع می‌شود: «الحمدالله الذی رفع‌السماء بغیر عمد ، فزینها بمصابیح السیارات و الثوابت ...»

۵۲ـ این رساله در هفت مقاله و خاتمه است به این شرح : **مقالهٔ اول** در مساحت زمین و آنچه متعلق به آن است. **مقالهٔ دوم** درابعاد ماه و اندازهٔ قطرآن. **مقالهٔ سوم** در ابعاد خورشید واندازهٔ قطر آن و بعد رأس مخروط سایه . **مقالهٔ چهارم**

---

۱ ← **کندی** Z ، ص ۱۲۷ ش ۲۰.

۲ ← ذیل شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۲۱ کتاب حاضر.

در ابعاد سیارات سفلی و اندازهٔ قطرهای آنها. **مقالهٔ پنجم** در ابعاد کواکب علوی وقطرهای آنها. **مقالهٔ ششم** در ابعاد فلک ثوابت. **مقالهٔ هفتم** در اجرام کواکب. **خاتمه** در جدولها.

این جدولها مشتملند بر: مساحت زمین و آنچه متعلق به آن است ـ ابعاد قمر ـ ابعاد عطارد ـ ابعاد زهره ـ ابعاد خورشید ـ ابعاد مریخ ـ ابعاد مشتری ـ ابعاد زحل ـ ابعاد ثوابت ـ اقطار سیارات و اجرام آنها ـ مقادیر اجرام ثوابت.

۵۳ـ «سلم‌السماء» را **کاشانی** در روز چهارشنبه ۲۱ ماه رمضان سال ۸۰۹ (مارس سال ۱٤۰۷) به پایان رسانیده است[۱].

۵٤ـ این رساله ظاهراً چند بار در تهران به چاپ رسیده است. از جمله یک نسخهٔ چاپ سنگی مورخ ۱۲۹۹ ﻫ. ق. آن با بعضی از نسخه‌های چاپی «مفتاح الحساب» چاپ ۱۳۰٦ ﻫ.ق. یکجا جلد شده است. نسخه‌های خطی آن فراوان است[۲] که از آن جمله است نسخهٔ خطی مشهد [۳] و نسخهٔ دیگری متعلق به نویسنده.

۵۵ـ نسخهٔ چاپ سنگی مورخ ۱۲۹۹ ﻫ.ق. و برخی از نسخه‌های خطی این رساله فقط «سلم‌السماء» نامیده شده است، اما بعضی دیگر از نسخه‌های خطی آن نام «رسالهٔ کمالیه» را نیز دارد. مانند نسخهٔ خطی موجود در کتابخانهٔ لیدن[٤] که در سال ۹۲۲ ﻫ.ق. استنساخ شده است و همچنین نسخهٔ موجود در مشهد.

از مطالعه و مقایسهٔ مقدمهٔ این رساله در نسخه‌های مختلف ظاهراً چنین به نظر می‌آید که **کاشانی** ابتدا این رساله را «رسالهٔ کمالیه» نامیده و آن را به وزیری موسوم

۱ـ این تاریخ از یک نسخهٔ خطی رسالهٔ سلم‌السماء موجود در استانبول به دست آمده است ← **کراوزه** S، ص ۵۱۰ ش ٤۲۹.

۲ ← **بروکلمان** S_2، ص ۲۹۵.

۳ ← **فهرست رضوی**، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۳٦ ش ۱۱۱.

٤ ـ به شمارهٔ CCO1141.

به **کمال‌الدین محمود** اهدا کرده است و بعداً (شاید هنگامی که به سمرقند رفته) نام «کمالیه» را از آن حذف کرده و آن را «سلم‌السماء» نامیده است (ونیز ممکن است که از ابتدا هردو نام را روی آن گذاشته وبعداً نام کمالیه را حذف کرده باشد) ولی، **کاشانی** خود در مقدمهٔ «مفتاح‌الحساب» که سالها پس از رسالهٔ مذکور تألیف کرده آن را «سلم‌السماء» نامیده است[۱].

۵۶ـ برای آنکه تفاوت بین نسخه‌های مختلف در مورد عنوان این رساله روشن شود ، قسمتی از مقدمهٔ آن را از روی دو نسخهٔ متفاوت در اینجا می‌آورم (عباراتی که باهم اختلاف دارند باحروف سیاه چاپ شده تابهتربتوان این اختلاف را مشاهده کرد) :

در نسخهٔ چاپی و نسخهٔ خطی متعلق به نویسنده آمده است : «فحررت هذه الرسالة مشتملة علی استخراج ابعاد الکواکب و انصاف اقطارها و مقادیرالاجرام من غیر مساهلة فی‌الحساب **لیکون تذکرة للاحباب و تبصرة لاولی‌الالباب و سمیتها سلم‌السماء**» .

همین قسمت ، در نسخهٔ خطی موجود در لیدن[۲] چنین است : «فحررت هذه‌الرسالة مشتملة علی استخراج ابعاد الکواکب وانصاف‌اقطارها و مقادیرالاجرام من غیر مساهلة فی‌الحساب **لأتوسل بها عالی** (کذا) **مجلس من هوللعلی و المفاخر مجمع ... مولی اعاظم الوزراء ... ذوالمناصب و المعالی ... المخصوص بعنایة الملک المعبود : کمال‌الحق والدنیا والدین محمود خلدالله تعالی ظلال عواطفه ... فانی بالقصور و العجز لمعترف و من تیار بحار الافاضل لمغترف و سمیته بالرسالة**

۱ ← **مفتاح** ، ص ۲ : «وصنفت‌رسائل اخری مثل الرسالة‌المسماة بسلم‌السماء فی اشکال وقع‌للمتقدمین فی‌الابعاد و الاجرام» .

۲ ـ عکس چهار صفحهٔ اول این نسخه را در صفحات ۴۰ و ۴۱ همین کتاب خواهید یافت .

الکمالیة»[۱].

ترجمهٔ مقدمه رسالهٔ سلم‌السماء

۵۷ـ این رساله هنوز به فارسی و یا زبانهای دیگر ترجمه نشده ومطالب آن مورد بررسی قرار نگرفته است. فقط قسمت اعظم و مهم مقدمهٔ آن را آقای **محیط طباطبائی** به فارسی برگردانده است[۲] و من عین ترجمهٔ ایشان را برای مزید فایده دراینجا می‌آورم :

«نیازمندترین مردم خدا به‌آمرزش و بخشش‌او،جمشیدپسر مسعودبن محمود طبیب کاشی ملقب به غیاث،چنین می گوید که : چون بمطالعهٔ کتابهای ریاضی و ومباحث هیأت و سماویات به ویژه مسألهٔ ابعاد فلکها و استخراج انصاف قطرها پرداختم دیدم صاحبان فن دراین باب اختلافهایی دارند ، چنانکه بیشتر ایشان افلاك را به ترتیب مشهور اثبات کرده و فلك ناهید را زیر فلك خورشید تعیین نموده‌اند و برخی (از متأخران) پنداشته‌اند که فلك زهره برفراز فلك شمس است ، و دلیل برآن آورده‌اند که درمجسطی دوری بین‌فلك مایل قمر و مقعرفلك خورشید را طوری معین ساخته‌است که برای‌ثخن وستبری دو فلك زهره و عطارد کافی نیست چه رسد بدانکه فاصلهٔ میان محدب‌جوزهر قمر و مقعر فلك شمس گنجایش آن دورا داشته باشد ، باوجود این به‌مقادیر نیمه‌قطرهای کواکب‌التفاتی‌نداشته ، درصورتی که مسافت همهٔ آنها از نیمهٔ قطر یا شعاع عالم کون و فساد به اندازهٔ ده هزار و دویست‌وبیست‌وهفت‌فرسخ بیشتراست ، ودورترین بعد هرکوکبی‌راهمانانزدیکترین بعد کوکبی که برفراز آن واقع شده است گرفته‌اند».

---

۱ ـ دراینجا در نسخهٔ خطی کتابخانهٔ لیدن علامت گذاشته شده و در حاشیه به‌همان خط متن نوشته شده است «بسلم‌السماء».

۲ ← **محیط :** غیاث‌الدین ، ص ۲۲ تا ۲۳ ـ **لغت نامه** ، حرف«غ» صفحهٔ ۳۸۸ ستونهای سوم و چهارم.

«مدتی بود که خود را به حل این اشکال وادارکرده بودم و به اینکه گره از این موضوع گشاده شود مشعوف بودم ، پس‌از خداوند مشکل گشا یاری جستم که آنچه دراین باب مقرون به صواب است به من‌الهام کند و مرا به راه راست هدایت نماید ، و به اعمال حسابی برای استنباط این بعدها سرگرم گشتم ، و تقویم قمر و عرض آن را به همان تاریخ وقوع دوخسوفی که بطلمیوس در مجسطی آورده استخراج نمودم تاقطر قمر را به دست‌آوردم وحساب‌را باز از سر گرفتم و دقت کامل نمودم که حتی یک ثالثه هم از نظر نیفتد ، و به کسوری رسیدم که پیش‌از این در استخراج عرض قمر هنگام آن‌دو خسوف بدان التفاتی نداشتند . . .»

«پس این رساله را در باب استخراج بعدهای کواکب و نیمه‌قطرهای آنها و اندازهٔ اجرام ، بدون سهل انگاری در محاسبه ، نوشتم تا برای دوستان یادبودی و برای خردمندان رهنمایی باشد ؛ و آن را «سلم‌السماء» نام نهادم» .

۵۸ـ تبصره ـ سوتر نوشته است[۱] که « در فهرست کتابخانهٔ (بادلیان) اکسفورد[۲] نام کتابی در شرح زیج **الغ‌بیک** تألیف **علی قوشچی** آمده است که به فارسی است ، اما احتمال می‌رود که این کتاب شرح رسالهٔ «سلم‌السماء» **کاشانی** باشد ، زیرا اسم «سلم‌السماء» در عنوان آن کتاب دیده می‌شود» . **بروکلمان** هم به تقلید از **سوتر** این شرح را شرح رسالهٔ «سلم‌السماء» دانسته است[۳] اما ظاهراً کتاب مذکور همان شرح زیج الغ‌بیک است[٤] .

هشت ـ کتاب نزهةالحدائق (عربی) .

۵۹ـ این کتاب‌را **کاشانی** در تاریخ دهم‌ذیحجهٔ سال ۸۱۸ (۱۰ فوریهٔ ۱٤۱٦)

---

۱ ← **سوتر** M ، ص ۱۷۸ ش ٤۳۸ .

۲ — ج I شمارهٔ ۷۲/۲ .

۳ ← **بروکلمان** S_2 ، ص ۲۹۵ .

٤ ← **ستوری** P ، ج ۲ ص ۷۰ .

یعنی کمی بعداز نوشتن رساله در «شرح آلات رصد» (شرحش خواهد آمد) در کاشان به پایان رسانیده است[1]. **کاشانی** آلتی موسوم به «طبق المناطق» اختراع کرده که با آن می‌توان تقاویم کواکب هفتگانه وعروض آنها و ابعاد آنها را از زمین وعمل خسوف و کسوف را به آسانترین طریق و در مدت کم شناخت، و این کتاب را در چگونگی آن آلت و روش به کار بردن آن نوشته است. متن این کتاب دارای دو باب و خاتمه است. باب اول در بارهٔ ساختن «طبق المناطق»، و باب دوم (درپانزده فصل» در بارهٔ چگونگی عمل با آن آلت، و خاتمه در بارهٔ ساختن و به کار بردن «لوح اتصالات» است و آن نیز آلتی است که **کاشانی** خرد قبل از « طبق المناطق » اختراع کرده بوده است.

۶۰ـ کتاب «نزهة‌الحدائق» ذیلی هم دارد که آن را **کاشانی** در نیمهٔ ماه شعبان سال ۸۲۹ (۲۲ ژوئن ۱۴۲۶) یعنی یازده سال پس ازتألیف متن «نزهة‌الحدائق» و سه سال قبل ازفوت خوددرسمرقند درده «الحاق» نوشته و به «نزهة‌الحدائق» افزوده است.

در مقدمهٔ این ذیل **کاشانی** می‌نویسد: «... چون از تحریر رسالهٔ موسوم به نزهة‌الحدائق که در بارهٔ ساختن آلتی است که خود اختراع کرده‌ام، و آن را طبق المناطق نامیده‌ام، مدت زمانی گذشت، چیزهای دیگری به فکرم رسید و مصمم شدم که آنها را به عنوان ذیل در ده الحاق به آن کتاب اضافه کنم...»

الحاق دهم در بارهٔ نامگذاری «طبق المناطق» است و **کاشانی** در آن می گوید که، در آغاز تحریر رسالهٔ «نزهة‌الحدائق»، آلتی را که اختراع کرده بوده «طبق المناطق» نامیده و، پس از آنکه رساله منتشر شده و آن آلت به آن نام شهرت پیدا کرده، دوستانش به او گفته‌اند که چون نامش **جمشید** است بهتر است این آلت را «جام جم» بنامد، و او از پذیرفتن این نام امتناع می کرده، تااینکه پس از نوشتن

۱ ـ چه خود وی در آخر آن نوشته است: فرغت من تألیفها یوم‌النحرحجة ثمان عشر و ثمانمائة هجریة».

ذیل کتاب در نتیجهٔ اصرار دوستانش بالاخره نام «جام جمشید» را هم بر «طبق المناطق» نهاده است.

۶۱ـ یک نسخهٔ خطی از کتاب «نزهةالحدائق» وذیل آن (ملحقات) بهشمارهٔ ۲۰۵۸ در کتابخانهٔ مرکزیدانشگاهتهران موجود است. اینکه در فهرست کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه[1] نوشته شده که ذیل کتاب دربارهٔ لوح اتصالات است درست نیست. در واقع **کاشانی** در ذیل کتاب آنچه را در متن دربارهٔ «طبق المناطق» نوشته بوده کامل کرده است.

۶۲ـ کتاب «نزهةالحدائق» و ذیل آن در آخر کتاب «مفتاح الحساب» چاپ تهران، سال ۱۳۰۶ ه.ق. از صفحهٔ ۲۰۵ تا ۳۱۳ به چاپ رسیده است. و یک نسخهٔ خطی آن هم در دیوان هند «ایندیاافیس» به شمارهٔ ۲۱۰ موجود است.

کارهای دکتر کندی[2] دربارهٔ کتاب نزهةالحدائق

۶۳ـ رسالهای به فارسی بدون عنوان و بدون نام مؤلف در مجموعهٔ **گارت** دانشگاه **پرینستون**[3] موجود است که دربارهٔ طرز ساختن و به کار بردن «طبق المناطق» و «لوح اتصالات» **کاشانی** در زمان **بایزیدثانی** سلطان عثمانی، یعنی بین سالهای ۸۸۶ (۱٤۸۱) تا ۹۱۸ (۱۵۱۲)، ظاهراً در قسطنطنیه نوشته شده و به سلطان مذکور اهدا گردیده است. این رساله در دو مقاله است. مقالهٔ اول آن «درصنعت طبق المناطق» و مشتمل بر پنج باب وخاتمه (درصفت لوح اتصالات) است، و مقالهٔ دوم آن «در عمل با طبق المناطق» ومشتمل بر پانزده باب و خاتمه (درعمل به لوح اتصالات) است، و مؤلف، که آن را با استفادهٔ از کتاب «نزهةالحدائق»

---

۱ ← **فهرست دانشگاه**، ج ۹ ص ۱۲۹۰.

۲ - D$_r$ E. S. KENNEDY.

۳ - Garett Collection, Princeton University.

کاشانی و ذیل آن فراهم آورده است ، در مقدمهٔ آن می‌نویسد : «و استاد محقق و نحریر مدقق، مکمل علوم اوایل و کاشف معضلات مسایل، افتخارالحکماء فی‌العالم، مولاناء اعظم مولانا غیاث‌الملة و الدین جمشید ، برداللہ مضجعه ، آلتی تصور کرد و آن را «طبق‌المناطق» نام نهاد ، و رساله‌ای در کیفیت صنعت و عمل آن پرداخته که بدان آلت معمولات زیج با سهل طرق واقل زمان‌عمل کرده می‌شود ، و چندان احتیاج به ضرب و قسمت و حساب ندارد ، والی زماننا هذا هیچ احد از آحاد علما ، باوجود آنکه همگی همت براستجماع مآثر فضل و افضال متصور داشته‌اند ، نقاب حجاب از چهرهٔ آن مخدره برنداشته‌اند ...»

٦٤ـ دکتر**کندی** قبلاً در سالهای ۱۹٤۷ تا ۱۹۵۲ میلادی چند مقاله در بارهٔ مطالب کتاب «نزهةالحدائق» بااستفاده از رسالهٔ فارسی مذکور نوشت[۱] ، و در آنها «لوح اتصالات» و«طبق‌المناطق» **کاشانی** را معرفی کرد،و روش اندازه گیری عرض جغرافیایی را براساس نظریهٔ بطلمیوس و محاسبهٔ خسوف را به وسیلهٔ «طبق المناطق) شرح داد. بعداً در سال ۱۹٦۰ میلادی متن فارسی رسالهٔ مذکور را با ترجمهٔ انگلیسی آن و شرح و تفسیر مطالب مهم آن درکتابی جداگانه منتشر ساخت[۲] ، و در واقع کارهای سابق خود را دربارهٔ کتاب «نزهةالحدائق» کامل و منقح ساخت ، و از این راه خدمتی شایان تقدیر به تاریخ نجوم اسلامی‌انجام داد.

٦٥ـ درکتاب اخیر متأسفانه برای دکتر **کندی** سوء تفاهمی رخ داده است که اگر چه مهم نیست ولی رفع آن لازم به نظر می‌آید :

کاشانی در الحاق نهم ذیل کتاب «نزهةالحدائق»[۳] می‌نویسد : «الحاق التاسع فی‌الاشاره الی کیفیةالعمل بما ذکرنا فی‌الحاق‌السادس و السابع ... فطریق

---

۱ ← **کندی** C و **کندی** T و**کندی** I و**کندی** E.

۲ ← **کندی** P.

۳ ← که با بعضی‌از نسخه‌های مفتاح‌الحساب چاپی (چاپ تهران ۱۳۰٦ ﻫ . ق) جلد شده است ، صفحات ۳۱۰ و ۳۱۱.

العمل بها فی اکثرالمواضع کما ذکرنا فی الرسالة **الاقلیلاً منه** اوردناه فی الذیل ...»

یعنی : «الحاق نهم دربارهٔ اشاره به چگونگی عمل به آنچه در الحاق ششم و هفتم گفتیم ... و طریق عمل به آن در بیشترمواضع همانست که (درمتن) رساله (نزهة الحدائق) ذکر کردیم مگر کمی از آن (الاقلیلامنه) که در ذیل آوردیم ...»

- دکتر **کندی** اشتباهاً «الاقلیلاً منه» یعنی «مگر کمی از آن» را چون دنبال کلمهٔ «الرسالة» بوده است نام رساله‌ای تصور کرده ودر صفحهٔ هفت کتاب مذکور (سطر هفتم) آن را به صورت *Al - risālat al - Iqlīlāminah* جزو تألیفات **کاشانی** ثبت کرده و پیداست که این درست نیست و باید اصلاح شود.

نه - رسالهٔ شرح آلات رصد (فارسی).

۶۶- این رسالهٔ مختصر را **کاشانی** در ذیقعدهٔ سال ۸۱۸ (ژانویهٔ ۱۴۱۶) در شرح هشت آلت رصد نوشته است ، و آن هشت آلت عبارتند از : ذات‌الشعبتین - ذات‌الحلق - حلقهٔ اعتدال - حلقتان - سدس فخری - ذات‌السمت و الارتفاع - ذات الجیب‌والسهم - ذات‌الحلق صغیر.

۶۷-کاشانی در مقدمهٔ این رساله می‌نویسد : «... اما بعد این رساله‌ایست در شرح الات رصد که برحسب فرمان پادشاه اسلام ... السطان اسکندر[1] ... در سلک تحریر آمد ...» و در پایان رساله عبارت زیر خوانده می‌شود : حرره اقل عبادالله جمشید بن مسعود بن محمود الطبیب الکاشی الملقب به غیاث ، احسن‌الله احواله ، فی ذی‌القعدة سنة ثمان عشر و ثمانمائة هجریة نبویة».

۶۸- یک نسخهٔ خطی از این رساله درکتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات تهران (مجموعهٔ حکمت) به شمارهٔ ۱۵۹/۴ موجود است[2]. یک نسخهٔ خطی نیز ازاین رساله درکتابخانهٔ لیدن درسه صفحه‌به شمارهٔ۲۶۴۷موجود است[3] که تاریخ تحریر

---

۱ - دربارهٔ این شخص رجوع کنید به : **ستوری** ، ج ۲ ص ۷۳ و **کندی** P ، ص ۲ و ذیل شمارهٔ ۳ صفحهٔ ۶ کتاب حاضر.

۲ ← فهرست نسخه‌های خطی دانشکدهٔ ادبیات ، مجموعهٔ حکمت ، صفحهٔ ۴۴ .

۳ ← فهرست کتابخانهٔ لیدن ج ۵ ص ۲۴۵ ش ۲۶۴۷ (Cod. 945 Warner) .

ندارد . عکس این نسخه را در صفحات ۴۲ تا ۴۴ این کتاب چاپ کرده و برای آنکه خواننده زودتر بتواند اسامی آلات رصد را در آن بیابد زیر آن اسامی آلات خط کشیده‌ایم .

ـ متن فارسی این رساله را **بارتلد** در ۱۹۱۸ به چاپ رسانده[۱] و **کندی** مقاله‌ای دربارهٔ رسالهٔ مذکور نوشته است[۲] .

ده ـ مختصر در علم هیئت (فارسی) .

۶۹ـ این کتاب را **کاشانی** در سال ۸۱۳ (۱۴۱۰) یا پیش از آن تاریخ نوشته و آن را به **سلطان جلال‌الدین امیرزاده اسکندر بهادرخان** اهدا کرده است .

یک نسخهٔ خطی ناقص از این کتاب که در سال ۸۱۳/۱۴ (۱۴۱۰/۱۱) نوشته شده، جزو مجموعه‌ای در کتابخانهٔ موزهٔ بریتانیا[۳] موجود است و فیلم آن به شمارهٔ ۲۴/۶ در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران هست[۴] . و یک نسخهٔ خطی دیگر از آن در کتابخانهٔ وزیری جامع یزد و فیلم آن در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه به شمارهٔ ۲۴۶۴/۵ محفوظ است[۵] .

یک نسخهٔ خطی دیگر از این کتاب باعنوان «مختصر در هیئت» در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران به شمارهٔ ۲۱۶۰/۱ جزو مجموعه‌ای موجود است که ناقص است و تا نیمهٔ باب پانزدهم دارد[۶] . و یک نسخهٔ دیگر در کتابخانهٔ مجلس به شمارهٔ ۵۰۰۲ موجود است .

۷۰ـ کتاب «مختصر در علم هیئت» چنین شروع می‌شود : «الحمدلله الذی خلق السموات و الارضین ... اما بعد این مختصریست درعلم هیئت برحسب اشارت

۱ ← **ستوری** P ، ج ۲ ص ۷۳ ـ **صابیلی** O ، ص ۴۳۳ .
۲ ← **کندی** A .
۳ ← **ستوری** P ، ج ۲ ص ۷۲ .
۴ ← **فهرست میکروفیلمهای دانشگاه** : ص ۴۰۲ .
۵ ← **فهرست میکروفیلمهای دانشگاه** : ص ۶۹۸ .
۶ ← **فهرست دانشگاه** ، ج ۹ ص ۸۵۲ .

من اشارته حکم و طاعته غنم ... و هوالسطان الاعظم ... جلال‌الدین و الدنیا امیرزاده اسکندر، خلدالله تعالی خلافته و ملکه و سلطانه، بندهٔ کمترین جمشیدبن مسعودبن محمود، الملقب بغیاث، در سلک تحریرآورد. هرچند این بندهٔ کمترین خود را درحد (یا عدد ؟) مصنفان نمی‌داند و بعجز و قصور خویش معترفست، امیدوارکه بعین رضا ملحوظ گردد. و این رساله را مرتب کردیم بر بیست باب...»

-۷۱- فهرست پانزده باب موجود در نسخهٔ خطی کتابخانهٔ دانشگاه تهران به این شرح است: ۱- درذکرافلاك وکیفیت و ترتیب آن. ۲- جملهٔ‌حرکات افلاك بردو نوع است ... ۳- ذکر دوایر عظیمه. ٤- در ذکر قوسها. ۵- درهیأت‌افلاك شمس. ٦- درهیأت افلاك قمر. ۷- در ذکر افلاك‌علویه و زهره و حرکات آنها. ۸- در افلاك عطارد وحرکات آنها. ۹- در عروض. ۱۰- دراختلاف منظر. ۱۱- در زیادتی نور ماه و نقصان آن. ۱۲- (ظاهراً در خسوف) چون زمین جسمی کثیف است و تاریك ... ۱۳- در هیأت کسوف. ۱٤- در هیأت زمین. ۱۵- درمعرفت‌خط نصف‌النهار وسمت قبله(این باب ظاهراً نا تمام است).

۷۲- در باب سوم این کتاب‌اصطلاحات زیر تعریف شده است: معدل‌النهار- منطقة‌البروج - دایرهٔ ماربه‌اقطاب‌اربعه-دایرهٔ‌میل - دایرهٔ‌عرضیه-دایرهٔ نصف‌النهار- دایرهٔ اول سموت - دایرهٔ سمت - دایرهٔ افق حادث - مدارات یومی.

و در باب چهارم آن قوسهای زیر تعریف شده است: تقویم کوکب - عرض کوکب - میل اول - میل‌دوم - میل کلی - بُعد از معدل النهار - عرض بلد-طول بلد - مطالع ممرکوکب - مطالع - سمت مشرق - تعدیل‌النهار - سمت - ارتفاع - عرض اقلیم - عرض افق حادث - سمت قبله.

یازده - رساله‌هایی که به‌کاشانی منسوب است.

-۷۳- **رساله درساخت اسطرلاب**(فارسی) - نام این رساله‌درفهرست کتابخانهٔ

آستان قدس رضوی آمده[۱] و مؤلف‌فهرست مذکور آن را از تألیفات **کاشانی** معرفی کرده است.

۷٤ (الف) ـ سمت قبله از دایرهٔ هندیهٔ معروفه (به عربی) ـ در همان کتابخانه و در دنبالهٔ رسالهٔ فوق (در ساخت اسطرلاب) رسالهٔ «سمت قبله» موجود است که مؤلف فهرست گمان کرده است که از **کاشانی** باشد و معلوم نیست که این حدس تا چه اندازه به حقیقت نزدیک است.

۷٤(ب) ـ تشریح‌درپرگار (فارسی)ـ در فهرست کتابخانهٔ استان قدس رضوی (ج ۳ فصل ۱۷ ص ۱٤ ش ۳۹) نام این رساله آمده و مؤلف فهرست مذکور نوشته که محتمل است این رساله از **عبدالعلی بیرجندی** و یا از **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** باشد.

۷۵ـ مفتاح الاسباب فی علم‌الزیج ـ نام این رساله در «کتاب مخطوطات الموصل» تألیف **داود چلبی** موصلی، چاپ بغداد، سال ۱۹۲۷ میلادی آمده است و منسوب به کاشانی است[۲].

۷٦ـ تبصره ـ باید دانست که رسالهٔ «عمل‌الضرب‌بالتخت و التراب» که با رسالهٔ «سلم‌السماء[۳]» و «رسالهٔ استخراج جیب درجهٔ واحده[٤]» در ۱۲۹۹ ه.ق. در تهران به چاپ سنگی رسیده است ودرپایان برخی از نسخه های «مفتاح‌الحساب» چاپ سنگی سال ۱۳۰٦ ه.ق. دیده می‌شود، و بعضی آن را از کاشانی دانسته‌اند[۵] از **نصیرالدین طوسی** است که ظاهراً از کتاب «جوامع‌الحساب[٦]» وی استخراج شده است.

---

۱ ← **فهرست رضوی**، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۲۸ ش ۸٤.

۲ ← **بروکلمان** S_2، ص ۲۹۵ ـ **کندی** P، ص ٦ و ۲۰٤ ش ٤۰.

۳ ← ش ۵۱ تا ۵۸ کتاب حاضر.

٤ ← بخش پنجم کتاب حاضر.

۵ ← **کندی** P، ص ۷.

٦ ← **فهرست دانشگاه**، ج ۱۳ ص ۳۳۷۰.

دوازده ـ نامه‌های کاشانی .

۷۷ـ علاوه برنامه‌ای که کاشانی از سمرقند به پدرش نوشته و قسمتهایی از آن را قبلاً نقل کردیم[۱] ، در مجموعهٔ خطی شمارهٔ ٤٤/٤٤ ١ ٢ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران[۲] مطالبی از نامهٔ دیگری از **کاشانی** نقل شده که چون حاوی نکات سودمندی است ، بخشی از آن را عیناً دراینجا می‌آوریم :

مولانا **غیاث‌الدین جشمید کاشانی** مصنف«سلم‌السماء» درکتابتی که به‌مردم خودبه کاشان‌نوشته‌بود قید کرده‌بود که‌نوبتی **میرزا الغ‌بیک** سی‌هزاردینار کپکی[۳] صدقه فرموده بود که‌ازآن‌جمله ده هزاربه طلبه دهند. اسامی طلبه را قلمی کردند ده هزار و کسری بود که به‌درس و تدریس‌مشغول‌اند ، وهمین مقدار در خانه‌های خود هستند از بزرگان و اولادشان که محتاج به‌وظیفه نیستند ، وازآن جمله‌پانصد کس به ریاضیات مشغول‌اند ، ودر بیست موضع درس این فن گویند ، ادنای‌ایشان در فارس و عراق نظیر ندارد ، و بیست‌وچهار مستخرجند که بعضی هیوی‌اند ، ونیز قید کرده که در مدرسهٔ میرزا الغ بیک سه مدرس‌اند یکی **قاضی زاده . . .**»

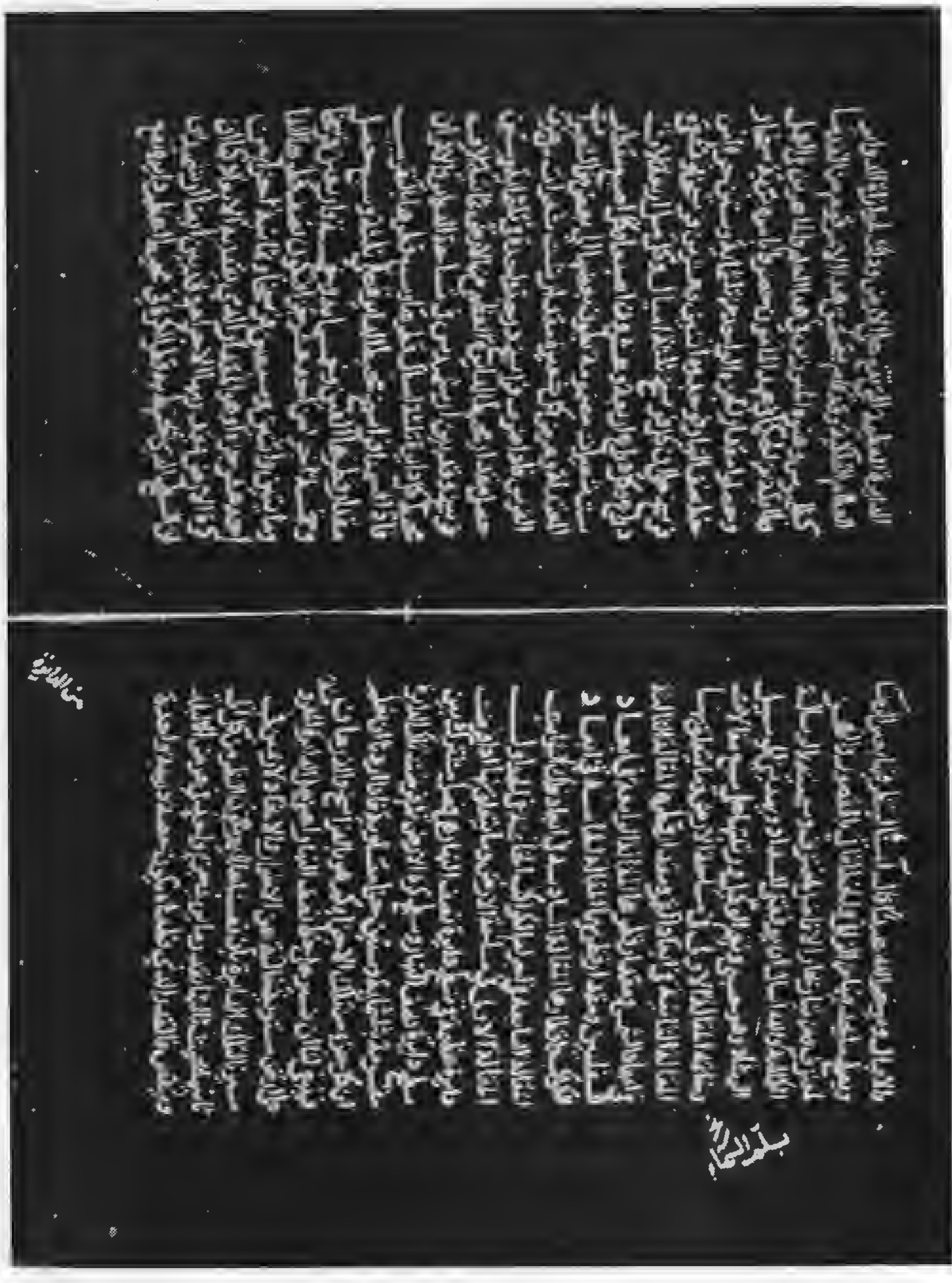
---

۱ ← ش ٤ تا ۷ کتاب حاضر.

۲ ـ شخصاً دیده‌ام.

۳ ـ کپکی (Kapeki) = نوعی دینار و تومان که در عهد مغول و تیموریان و صفویان متداول بوده.

صفحات اول و دوم رسالهٔ «سلم السماء» (عکس نسخهٔ خطی موجود در لیدن) ← ش ۵۵

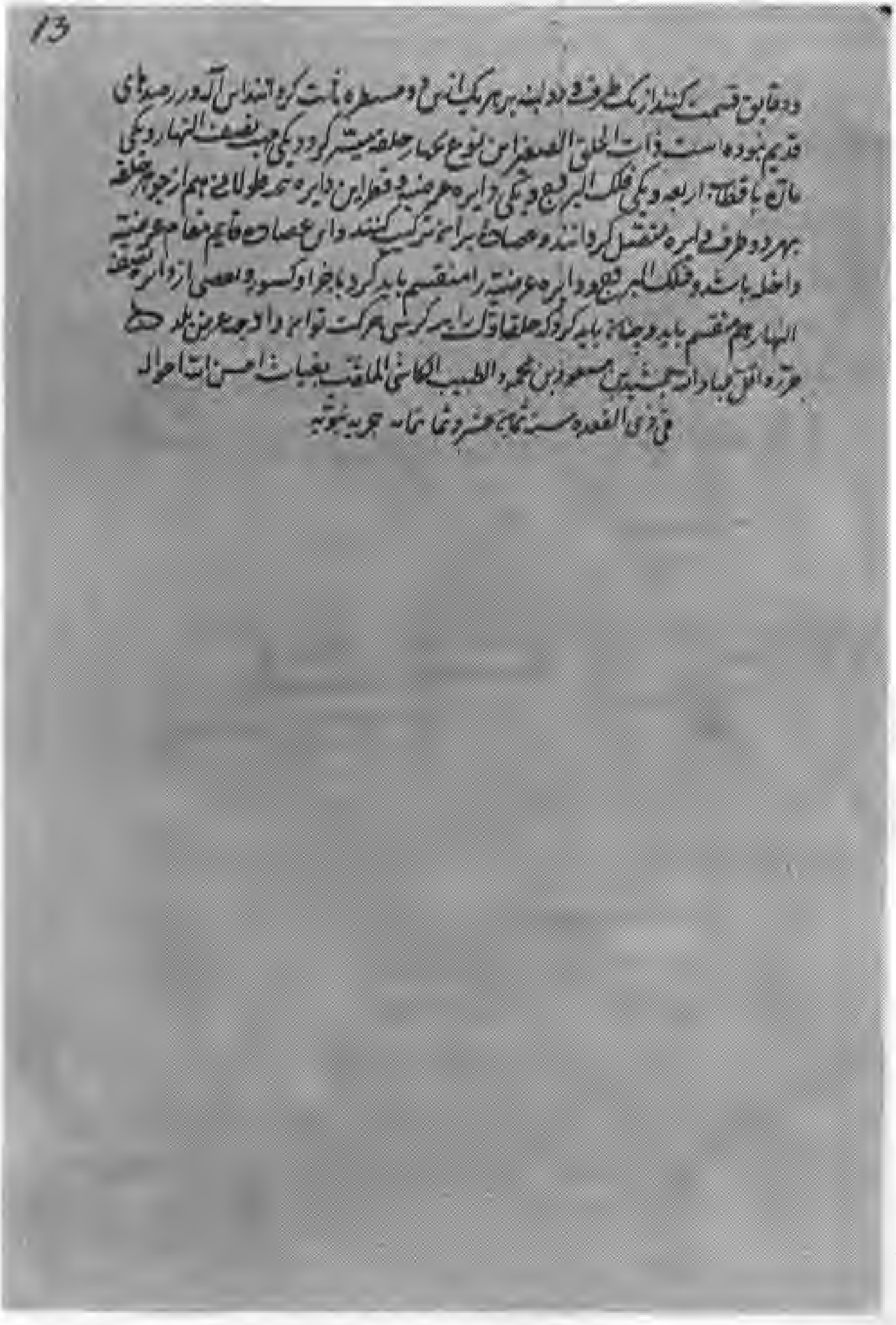


صفحات سوم و چهارم رسالهٔ «سلم السماء» (عکس نسخهٔ خطی موجود در لیدن) ← ص ٥٥


بسم الله الرحمن الرحیم الحمد لله رب العالمین والصلوة والسلام علی خیر خلقه محمد وآله الطیبین الطاهرین
اما بعد این رسالهایست در شرح آلات رصد که بحسب فرمان پادشاه اسلام فرمانروای
هفت اقلیم ظل الله فی الارضین قهرمان الماء والطین سلطان السلاطین فی العالم ملجأ وملاذ بنی آدم
القایم بامور المسلمین ولی امیر المؤمنین الواثق بالله الاکبر السلطان اسکندر خلد الله تعالی ملکه و
سلطانه وابد علی العالمین بره واحسانه در سلک تحریر آمد ذات الشعبتین سه مسطره باشد
قایم بر سطح افق و دوم را بر سر مسطره قایم بمسماری ترکیب کرده باشند بر مثال پرگار و سیوم را

صفحهٔ اول رسالهٔ «شرح الات رصد» (عکس نسخهٔ خطی موجود در لیدن) ← ش ۶۸

صفحهٔ دوم رسالهٔ «شرح آلات رصد» (عکس نسخهٔ خطی موجود در لیدن) — ش ۹۰۸


13

و دقایق قسمت کنند از یک طرف [illegible] و مسطره ثابت کرده اند این آلت در رصدهای
قدیم بوده است ذات الحلق الصغری این نوع چهار حلقه [illegible] کرده یکی بجهت نصف النهار و یکی
مار باقطاب اربعه و یکی فلک البروج و یکی دایره عرضیه و قطر این دایره [illegible] هم از جوف حلقه
بهر دو طرف دایره متصل کرده اند و عضاده برای آن ترکیب کنند و این عضاده قایم مقام عرضیه
داخل باشد و فلک البروج و دایره عرضیه را منقسم باید کرد باجزا و کسور و بعضی از دایره نصف
النهار هم منقسم باید [illegible] باید کرد که حلقها [illegible] کرسی [illegible] حرکت [illegible]
حرره اقل عباد الله [illegible] مسعود بن محمد الطبیب الکاشی الملقب بغیاث [illegible] احسن الله احواله
فی ذی القعده سنة ثمان عشر و ثمانمائه هجریه نبویه

صفحهٔ سوم رسالهٔ «شرح آلات رصد» (عکس نسخهٔ خطی موجود در لیدن) ← ش ۶۸.

بخش سوم

بحثی دربارهٔ کتاب مفتاح‌الحساب

تاریخ تألیف مفتاح‌الحساب

۷۸ـ «مفتاح‌الحساب» که به زبان عربی نوشته شده یکی از مهمترین تألیفات **کاشانی** است و ، باوجود آنکه برای تدریس نوشته شده ، شامل مطالب علمی جالب توجه می‌باشد و بسیار استادانه تألیف گردیده است[۱].

کاشانی ظاهراً تألیف این کتاب را مدتی پیش‌از سال ۸۲٤ (۱٤۲۱) شروع کرده است ، زیرا در آن سال **کاشانی** خود خلاصه‌ای از آن را فراهم آورده و آن را «تلخیص‌المفتاح» نامیده است. (← ش ۱۲ و ٤۱) اما در آن تاریخ هنوز «مفتاح الحساب» کامل نبوده و ظاهراً **کاشانی** در طی سالهای ۸۲٤ تا ۸۳۰ ه . ق . به تکمیل آن پرداخته و مطالبی به‌آن افزوده است. مثلاً وقتی در سال ۸۲۷ «رسالهٔ محیطیه» را تألیف کرده(← ش ۲۲۹) نام آن را در چند موضع از «مفتاح‌الحساب» که در شرف تکمیل بوده‌آورده است[۲]. بالاخره در سوم جمادی‌الاولی سال ۸۳۰ (۲ مارس ۱٤۲۷) **کاشانی** نسخهٔ کامل شدهٔ «مفتاح‌الحساب» را به **الغ‌بیک** تقدیم کرده است. در آخر بعضی‌از نسخه های خطی «مفتاح‌الحساب» عبارت‌زیر ثبت‌شده است[۳] :«صورة خط‌المصنف: حرره مؤلفه‌اضعف‌عباد‌الله ، جمشیدبن مسعودالطبیب

---

۱ - برای کسب اطلاع از نظر یوشکویچ در بارهٔ کتاب مفتاح‌الحساب رجوع کنیدبه شمارهٔ ۲٤ کتاب حاضر.

۲ ← **مفتاح** ، ص ۲ و ۷۹ و ۱۰۷.

۳ - از جمله درآخر نسخهٔ خطی شمارهٔ ٤۲۲/۱ کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات تهران (مجموعهٔ امام جمعهٔ کرمان ← **فهرست سوم‌ادبیات** ، ص ٦۱) وهمچنین درآخر نسخهٔ خطی شمارهٔ ۲٤۱۸ بانکیپور (← ص ۱۳ ج ۲۲ کاتالگ بانکیپور) .

احسن الله تعالی احواله، فی ثالث جمادی الاولی سنة ثلثین وثمانمائة ، هجریه مصطفویه و ۲۶ تیرماه القدیم سنه رضو یزدجردیة » .

نسخه‌های موجود مفتاح الحساب

۷۹ـ « مفتاح الحساب » درسال ۱۳۰۶ (۱۸۸۸) درتهران به چاپ سنگی رسیده و نسخه های خطی متعدد از آن نیز درایران و خارج از ایران موجود است[۱] .

درایران یک نسخهٔ خطی نفیس از «مفتاح الحساب» به خط **عبدالرزاق بن محمد ملقب به معین المنجم** ، که همان **معین‌الدین کاشی** است که با **کاشانی** به سمرقند رفته ، درکتابخانهٔ ملی ملک جزو مجموعه‌ای به شمارهٔ ۳۱۸۰ (از برگ ۱ تا برگ ۱۲۰) موجود است که کتابت آن درماه رجب سال ۸۳۰ ه.ق. یعنی درحدود دوماه پس از تاریخ تکمیل «مفتاح الحساب» درسمرقند پایان یافته است (بهترین نسخه).

بعض نسخه های خطی دیگر « مفتاح الحساب » درایران ازاین قرار است : درکتابخانهٔ ملی ملک[۲] نسخهٔ شمارهٔ ۳۲۵۲ - درکتابخانه مجلس شورای ملی[۳] نسخهٔ شمارهٔ ۱۵۳۰ (۱۵۱۹) و نسخهٔ شمارهٔ ۲۹۷۴/۱ - درکتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات تهران[۴] نسخهٔ شمارهٔ ۴۴۲/۱ (عکس این نسخه درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه بشمارهٔ ۲۷۶۰ موجوداست) - درکتابخانه مرکزی دانشگاه[۵] نسخه های شمارهٔ ۱۷۹۰/۱ و ۲۰۶۶ - درکتابخانهٔ آستان‌قدس رضوی[۶] نسخهٔ شمارهٔ ۱۶۵ .

---

۱ ← **بروکلمان** G_2 ، ص ۲۷۳ و **بروکلمان** S_2 ، ص ۲۹۵ ش ۵ .

۲ ← شخصاً دیده‌ام .

۳ ← **فهرست مجلس** ، ج ۱۰ ص ۴۲۱ و ج ۴ ص ۲۳۳ .

۴ ← **فهرست سوم ادبیات** ، ص ۱۹ .

۵ ← **فهرست دانشگاه** ، ج ۸ ص ۳۵۳ و ۶۹۴ .

۶ ← **فهرست رضوی** : ج ۳ فصل ۱۷ ص ۵۴ .

شرحها و ترجمه‌های مفتاح الحساب

۸۰ـ ویکه قسمتی از دیباچهٔ «مفتاح الحساب» وبعضی از قواعد آن را درسال ١٨٦٤ م به زبان فرانسوی ترجمه کرد[١] .

۸۱ـ لوکی درسال ١٩٤٤ م کتابی درشرح وتفسیر قسمتی از «مفتاح الحساب» نوشت و مقدمهٔ آن را به زبان آلمانی ترجمه کرد و این کتاب در ١٩٥١ به چاپ رسید[٢] .

۸۲ـ رزنفلد و سگال و یوشکویچ درسال ١٩٥٦ م متن عربی «مفتاح الحساب» را با ترجمه وشرح آن به زبان روسی منتشر ساختند[٣] .

۸۳ـ خانم **نائله رجائی** در ١٩٥١ م رسالهٔ پایان نامهٔ دکترای خود را در دانشگاه امریکائی بیروت دربارهٔ اختراع کسرهای اعشاری توسط **کاشانی** با استفاده از مطالب «مفتاح الحساب» و «رسالهٔ محیطیه» **کاشانی** نوشت[٤] .

۸۴ـ آقای **عبدالقادر داخل** در ١٩٥١ م موضوع رسالهٔ پایان‌نامهٔ دکترای خود را در دانشگاه امریکائی بیروت «استخراج ریشهٔ n ام در دستگاه شصتگانی توسط کاشانی» قرار داد . وی در این رساله باب پنجم[٥] از مقالهٔ سوم «مفتاح الحساب» را به انگلیسی ترجمه و شرح کرد و آن را با متن عربی باب مذکور و مطالب بسیار مفید دیگر در ١٩٦٠ م به‌چاپ رسانید[٦].

۸۵ـ علاوه‌براینهاقسمت‌مهم مقالهٔ **لوکی** دربارهٔ «استخراج ریشه n ام وبسط

---

١ ← **ویکه** P_1 ، ص ٢٢ تا ٢٥ .

٢ ← **لوکی** R ، همهٔ کتاب وصفحات ٦ تا ١٣ (ترجمهٔ مقدمهٔ مفتاح الحساب) .

٣ ← **رزنفلدو یوشکویچ** ، ص ٩ تا ٢٦١ (ترجمهٔ روسی مفتاح الحساب) و ٣٢٠ تا ٣٦٧ (شرح برخی از مطالب مفتاح الحساب) وص ٤٢٨ تا ٥٦٦ (متن عربی مفتاح الحساب) .

٤ ← **رجائی** : رساله .

٥ ← الباب الخامس فی استخراج الضلع الاول من المضلعات (**مفتاح**، ص ٧٤ تا ٧٨) .

٦ ← **داخل** : رساله .

دوجمله‌ای در ریاضیات اسلامی[۱]» ، مربوط به مطالب «مفتاح الحساب» است.

۸۶ـ محمداسماعیل حسینی‌بیرجندی دربین سالهای ۱۲۷۳ و ۱۲۹۴ ه.ق. درقصبهٔ اردکان یزد مقالهٔ چهارم «مفتاح الحساب» را که درباب مساحت است شرح کرده و این شرح را «نهایة‌الایضاح» نامیده و در دیباچهٔ آن **ناصرالدین‌شاه** را ستوده است. یک نسخه خطی ازاین شرح درکتابخانه مجلس شورای ملی موجود است[۲].

۸۷ـ این نکته را هم ناگفته نگذاریم که **یولیوس‌روسکا**[۳] نام کتاب «مفتاح الحساب» را درضمن فهرست تألیفات ریاضی اسلامی که باید ترجمه و انتشار آنها را به زبانهای اروپائی برسایر تألیفات دراین باب مقدم داشت ثبت کرده‌است[۴].

ترجمهٔ فارسی دیباچهٔ مفتاح‌الحساب

۸۸ـ آقای **محیط طباطبائی** چندسطر ازدیباچهٔ مفتاح الحساب را به‌فارسی‌ترجمه کرده است[۵] ، وگفتیم که **وپکه** نیز قسمت مهم آن دیباچه را به زبان فرانسوی و **لوکی** همهٔ آن را به زبان آلمانی ترجمه کرده‌اند .

لوکی متن عربی دیباجه «مفتاح الحساب» را از روی سه نسخهٔ خطی موجود درلندن و برلین و پاریس درآخرکتاب خود آورده است[۶] . این متن با دیباچهٔ مفتاح الحساب چاپی مختصر اختلافاتی دارد[۷] .

---

۱ ← **لوکی** A .
۲ ← **فهرست مجلس** ، ج ٤ ص ۲۳٤ .
۳ - Julius Ruska .
٤ ← **الدومیلی** S ، ص ۲۸۷ .
۵ ← **محیط** : غیاث‌الدین ، ص ۵ (سطر آخر) و ص ٦ (شش سطر اول) .
٦ ← **لوکی** R ، ص ۱۲۷ تا ۱۳۰ .
۷ - مثلاً رجوع کنید به ذیل شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۲۰ کتاب حاضر .

۸۹ـ ما دیباچهٔ «مفتاح الحساب» را از روی دیباچهٔ چاپ **لوکی** به فارسی برمی‌گردانیم :

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم وبتوفیقک نعتصم یا کریم

«ستایش خداوندی را سزاست که درآفرینش آحاد یگانه است ، و در به هم پیوستن اعداد گونا گون بی‌همتا است . و درود بربهترین آفریدهٔ او محمدص که والاترین شفاعت کنندهٔ روز رستاخیز است ، و برخاندان او و فرزندانش که راههای رهایی ورستگاری را رهنمونند. **اما بعد** ، نیازمندترین بندگان خدای تعالی به‌آمرزش و بخشش او جمشید پسر مسعود پسر محمود پزشک کاشی ملقب به غیاث ، که خداروزگارش را نیکو کرداناد ، چنین گوید :

«چون دراعمال حساب و قوانین هندسه چندان ممارست کردم که به حقایق آن رسیدم ، و به دقایق آن پی‌بردم ، و ازمسائل پیچیده و دشوار آن پرده برداشتم، ومشکلات‌آنرا گشودم، وقوانین ودستورهای بسیاردرآن‌یافتم، وآنچه را استخراجش بربسیاری‌ازکسان که به‌آن پرداخته بودند دشوار بود به‌دست آوردم، وهمهٔ جداول زیج ایلخانی را از نو با دقیقترین عمل استخراج کردم ، و **زیج** موسوم به **خاقانی** را درتکمیل **زیج ایلخانی** وضع کردم ، و آنچه درکارهای منجمان استنباط کردم و در زیج دیگری وجود نداشت بابرهانهای هندسی درآن گرد آوردم ، و نیز **زیج‌تسهیلات** و جداول پرا کندهٔ دیگر را وضع کردم ، و رساله های دیگری تصنیف نمودم ، مانند رسالهٔ موسوم به **سلم‌السماء** درحل دشواریهایی که برای پیشینیان درابعاد و اجرام رخ داده بود ، ورساله‌ای که آن‌را **محیطیه** نامیدم، درنسبت قطر به محیط ، و **رسالهٔ وتروجیب** دراستخراج آن دو برای یک سوم قوسی که وتروجیب آن معلوم باشد ـ و این نیز یکی از مسائلی است که بر پیشینیان دشوار بوده است ، چنانکه صاحب مجسطی درآن کتاب گفته که برای به دست آوردن آن راهی نیست ، و آلت موسوم به **طبق‌المناطق** را اختراع کردم و کتاب **نزهةالحدائق** را درچگونگی‌ساختن‌وشناختن آن نوشتم ، وآن آلتی است که تقاویم کوا کب و عرضهای آنها و دوری آنها اززمین

و رجوع آنها وخسوف‌وکسوف وآنچه متعلق به‌آنها است از روی‌آن به دست‌می‌آید، همچنین جوابهای مسائل بسیاری را که محاسبان زبردست برسبیل امتحان یا برای آموختن با من درمیان نهادند ، وحل‌آنها به‌وسیلهٔ معادلات ششگانهٔ‌جبری(۱) حاصل نشده بود استخراج کردم ، در اثنای این اعمال به دستورهای متعددی دست یافتم که با آنها اعمال مقدماتی حساب به آسانترین وجه و ساده‌ترین راه وکمترین عمل و بیشترین فایده و روشن‌ترین وضع صورت می‌گیرند . پس بهتر دیدم که آنها را مدون کنم، وبرآن‌شدم که به‌شرح‌آنها بپردازم تادوستان‌را تذکری باشد وخردمندان را مهارت افزاید(۲) ؛ و این کتاب را نوشتم و درآن آنچه را که مورد احتیاج شخص محاسب بود با احتراز از اطناب ممل و ایجاز مخل جمع آوردم وبرای بیشتر اعمال، دستوری درجدول قرار دادم تا به خاطر سپردن آنها برمهندسان(۳) آسان‌باشد . وهمهٔ جدولهایی که دراین کتاب وضع شده ساخته و پرداختهٔ من است و مسئول آسانی و دشواری آنها من هستم(٤) مگر هفت جدول که عبارتند از :

« اول جدولی که درآن حاصل‌ضربهای اعداد کوچکتر از ده قرار دارند(۵) - دوم شبکهٔ ضرب(٦) - سوم جدولی که درآن اصول منازل قرار دارند(۷) - چهارم‌مثال یکی کردن مخرجها(۸) - پنجم شناسایی مراتب حاصلضرب و خارج قسمت(۹) - ششم جدول جیبها(۱۰) - هفتم شناسایی جنس حاصلضرب و خارج قسمت(۱۱) » .

---

۱ — الست‌الجبریه، یعنی‌معادلات $ax^2=bx$ و $ax^2=c$ و $bx=c$ و $ax^2+bx=c$ و $ax^2+c=bx$ و $ax^2=bx+c$ که‌درآنها aوbوc اعداد مثبت هستند.

۲ ← **ویکه** از ابتدای مقدمهٔ مفتاح‌الحساب تا همین عبارت را از روی نسخهٔ خطی مفتاح‌الحساب موجود درموزهٔ بریتانیا به زبان فرانسوی ترجمه کرده است (← **ویکه** P_1 ، ص ۲۲ تا ص ۲۵) .

۳ — درمفتاح الحساب چاپی «لیسهل‌ضبطهاعلی‌المهوسین» ودربعض نسخه های دیگر «لیسهل‌ضبطهاعلی‌المهندسین» آمده است .

٤ ← مفتاح ، ص ۳ (عین‌عبارت این است : **فخاطری‌ابوعذره ومقتضب‌حلوه ومره**) .

۵ تا ۱۱ ← **مفتاح**، به‌ترتیب‌صفحات۱۲ و ۱۵ و ۳۸ و ٤۷ و ۷۲ و ۱۱٦ و ۱٦۰ .

«واین کتاب را جزو کتابخانهٔ . . . سلطان اعظم . . . الغ بیک گورکان . . . قرار دادم . و چون کتاب را به پایان رسانیدم ، آن را « مفتاح الحساب » نامیدم ، و از خداوند مسئلت دارم که مرا در درستی و راستی موفق گرداند ، و راه راست را به من بنمایاند ، و از کسی که به این کتاب نظر می‌افکند استدعا دارم که از ضعف عبارات آن مرا معذور دارد ، و اگر لغزشی درآن روی داده باشد برمن خرده نگیرد، چه من به عجز و تقصیر خود مقرم و به سستی بیان و نوشتهٔ خود معترفم . و این کتاب را به یک مقدمه و پنج مقاله مشتمل ساختم » .

فهرست مقالات وبابها وفصلهای مفتاح الحساب

۹۰ـ مقدمه ـ در تعریف حساب و عدد و اقسام آن

۹۱ـ مقالهٔ اول ـ در حساب عددهای صحیح با ارقام هندی و آن مشتمل است برشش باب : ۱ـ درصورتهای اعداد ومراتب آنها . ۲ـ درتضعیف وتنصیف وجمع وتفریق . ۳ـ درضرب . ٤ـ درتقسیم . ۵ـ دراستخراج ریشه های اعداد مانند جذروکعب . ٦ـ درمیزان (امتحان) اعمال .

۹۲ـ مقالهٔ دوم ـ درحساب کسر وآن مشتمل است بردوازده باب :
۱ـ درتعریف کسرها و اقسام آن. ۲ـ درچگونگی نوشتن ارقام کسرها .
۳ـ درشناخت تداخل واشتراك وتباین . ٤ـ درتجنیس ورفع . ۵ـ در یکی کردن مخرجهای کسرهای مختلف . ٦ـ درافراد (تبدیل) کسرهای مرکب . ۷ـ درتضعیف وتنصیف وجمع وتفریق . ۸ـ درضرب . ۹ـ در تقسیم . ۱۰ـ دراستخراج ریشه ها . ۱۱ـ در تحویل کسر ازیک مخرج به‌مخرج دیگر. ۱۲ـ درچگونگی ضرب دانگ‌ها (دوانیق) وطسوج ها و تقسیم آنها .

۹۳ـ مقالهٔ سوم ـ درطریق حساب منجمان ، وآن مشتمل است برشش باب :
۱ـ درشناخت ارقام جمل وچگونگی نوشتن آنها . ۲ـ درتضعیف وتنصیف

وجمع وتفریق . **۳ـ** درضرب . **۴ـ** درتقسیم . **۵ـ** دراستخراج ریشه ها .
۶ـ درتحویل ارقام ستینی (شصتگانی) به‌ارقام هندی و برعکس ، چـه صحیح باشند و چه کسری .

۹۴ـ مقالهٔ چهارم ـ درمساحت و آن مشتمل است برمقدمه و نه باب :

مقدمه ـ در تعریف مساحت . **باب ۱ـ** درمساحت مثلث و آنچـه مربوط بـه‌آن است ، و مشتمل است بـرسه فصل : (اول) درتعریف مثلث و اقسام آن . (دوم) درمساحت مثلث عموماً و استخراج ابعاد آن . (سوم) درمساحت‌مثلث متساوی‌الاضلاع خصوصاًواستخراج ابعاد آن . **باب ۲ـ** درمساحت چهارضلعی ها و آنچه متعلق به‌آنها است، وآن مشتمل‌است برپنج فصل : (اول) درتعریفات . (دوم) در مساحت مربـع و مستطیل و استخراج ابعاد آنهـا . (سوم) در لوزی (معین) و ذوالیمینین . (چهـارم) در شبه لوزی و ذوزنقـه . (پنجم) در ذوالرجلین و منحرف . **باب ۳ـ** درمساحت کثیرالاضلاعها و آنچه متعلق به آنها است، وآن‌مشتمل‌است برپنج‌فصل : (اول) درتعریف . (دوم) در مساحت کثیرالاضلاعها واستخراج ابعاد آنها . (سوم) درآنچه مختص به کثیرالاضلاع منتظم است و استخراج ابعاد آن . (چهارم) درآنچه مختص به‌شش‌ضلعی‌منتظم است . (پنجم) درآنچه مختص به هشت ضلعی منتظم است . **باب ۴ـ** در مساحت دایره و قطاع دایره وقطعهٔ دایره وحلقه وجزآنها وآنچه متعلق به‌آنها است، وآن‌مشتمل‌است‌برپنج‌فصل : (اول) درتعریفات . (دوم) درمساحت‌دایره و استخراج محیط آن برحسب قطر و برعکس . (سوم) درمساحت قطاع دایـره و قطعهٔ دایره واستخراج ابعاد آنها . (چهارم) درمساحت‌سایر سطح ها که محیط آنها خطوط مستدیرهستند . (پنجم) دربیان جدول جیب وچگونگی عمل باآن .
باب ۵ـ در مساحت سطوح مستوی غیر ازآنچه (قبلاً) ذکـر کردیم ، مانند شبه دایره و مطبل و مدرج و ذوات‌الشرفات و کثیرالاضلاع مستدیر و غیره .

باب ٦ـ درمساحت سطوح مستدیر مانند استوانه ها و مخروطها و کره و آنچه متعلق به آنهااست، وآن مشتمل است برشش فصل: (اول) درتعریفات. (دوم) درمساحت سطح استوانه. (سوم) درمساحت سطح مخروط. (چهارم) در مساحت سطح کره و استخراج قطر آن. (پنجم) درمساحت سطح قطعهٔ کره و استخراج ابعادآن. (ششم) درمساحت قاچ (ضلع الکره). **باب ۷ـ** درمساحت حجم اجسام، و آن مشتمل است برهشت فصل: (اول) درحجم استوانه. (دوم) درحجم مخروط. (سوم) درحجم مخروط ناقص. (چهارم) درحجم فضل مخروط وفضل معین مجسم. (پنجم) درحجم کره. (ششم) درحجم قطاع کره وقطعهٔ کره. (هفتم) درحجم کثیرالوجوههای منتظم. (هشتم) درمساحت حجم سایر اجسام. **باب ۸ـ** در اندازه گیری حجم بعضی از اجسام از روی وزن آنها. **باب ۹ـ** درحجم بناها و عمارات، و آن مشتمل است برسه فصل: (اول) درمساحت حجم طاق و ازج. (دوم) درحجم قبهٔ مجوفه. (سوم) درحجم سطوح مقرنس.

۹۵ـ مقالهٔ پنجم ـ دراستخراج مجهولات به‌وسیلهٔ جبرومقابله وخطأین‌وغیره با قواعد حسابی، وآن مشتمل است برچهار باب: **باب ۱ـ** در جبر و مقابله، و آن مشتمل است برده فصل: (اول) درتعریفات. (دوم) درجمع اجناس مانند عدد وشیء ومال وکعب. (سوم) درتفریق این اجناس. (چهارم) درضرب این اجناس. (پنجم) درتقسیم این اجناس. (ششم) درجذر این اجناس. (هفتم) در ذکر مسائل جبری. (هشتم) درچگونگی استخراج مجهول با معادلات ششگانهٔ مشهور. (نهم) در چگونگی استخراج مجهول، هرگاه عمل به تعادل بین دوجنس ختم شود که باهم همان نسبت را داشته باشند که اجناس معادلات ششگانهٔ مذکور باهم دارند. (دهم) درمسائلی که خود ما استنباط کرده‌ایم وبیان آن را وعده داده بودیم. **باب ۲ـ** دراستخراج مجهول

به‌طریق خطأین . **باب ۳ـ** در ایراد بعضی از قواعد حسابی که در استخراج مجهولات به‌آنها احتیاج پیدا می‌شود ، وآنها پنجاه قاعده هستند . **باب ٤ـ** درمثالها وآن مشتمل برچهل مثال است .

نگاهی به مقدمهٔ مفتاح‌الحساب

۹٦ـ دیدیم که « مفتاح‌الحساب » مشتمل بریک مقدمه و پنج مقاله است . بررسی این پنج مقاله ونقادی مطالبی که **کاشانی** ازخود استنباط کرده ، وبحث درآنچه از پیشینیان گرفته و آنها را بسط و توسعه داده است ، مستلزم تألیف کتابی مفصل و جداگانه‌است . دراین باره **پاول‌لوکی** کتابی نفیس به‌زبان آلمانی فراهم‌آورده[۱] که ، اگر چه شامل بحث درهمهٔ مقالات «مفتاح‌الحساب» نیست ، ولی درنوع خود کتابی است ممتاز و بسیار قابل استفاده ، همچنین گفتیم که **رزنفلد** و **یوشکویچ** در ترجمهٔ روسی که از «مفتاح‌الحساب» به عمل آورده‌اند بسیاری از مطالب آن را شرح کرده‌اند[۲] .

دراین بخش بدواً به عنوان نمونه مقدمه و مقالهٔ اول « مفتاح‌الحساب » را موردبررسی قرار می‌دهیم ، و سپس به برخی ازمطالب‌مهم مقالات دیگر آن نیزاشاره می‌کنیم، ودربخشهای آیندهٔ کتاب حاضر نیز هرجا مقتضی باشد ازآن کتاب گفتگو خواهیم کرد .

درمقدمهٔ « مفتاح‌الحساب» تعاریف زیر جلب توجه می‌کند :

۹۷ـ موضوع علم حساب عدد است و **عدد** درشمردن به‌کار می‌آید و مشتمل است برواحد و آنچه ازآن تألیف می‌شود[۳] ، و به‌اعتبار کمیت ذاتی ، یعنی اگر به

---

۱ ← **لوکی** R .

۲ ← **رزنفلدو یوشکویچ** ، ص ۳۲٤ تا ۳٦۷ .

۳ ← **مفتاح** ، ص ۸ : « فموضوعه‌العدد و هوما یقع فی‌العد ویشتمل علی‌الواحد و علی‌ما یتألف‌منه » .

عدد دیگر مضاف نشود ، آن را **صحیح** می‌نامند ، مانند یک و دو و ده و پانزده و غیره ، و به‌اعتبار کمیت اضافی ، یعنی اگر به عدد دیگر مضاف شود ، آن را **کسر** می‌گویند ، وعدد منسوب‌الیه را **مخرج** می‌خوانند[۱] ، مانند یک از دو (کالواحد من‌الاثنین) و آن نصف است وسه از پنج (کالثلثة من‌الخمسة) و آن سه پنجم‌است.

۹۸ـ عدد مفرد عددی است که فقط دریک مرتبه واقع شود[۲] (یعنی ازیکی از ارقام نه‌گانه و احیاناً یک یا چند صفر تشکیل گردد) مانند ۱ و ۲ و ۱۰ و ۹۰ و ۳۰۰۰۰ .

۹۹ـ عدد مجرد ـ واحددرهرمرتبه‌ای که‌واقع‌شود عددمجرد نامیده‌می‌شود[۳] مانند ۱ و ۱۰ و ۱۰۰۰ (یعنی یکی ازقوای صحیح عدد ۱۰) .

۱۰۰ـ عدد مرکب عددی است که در دومرتبه یا بیشتر واقع شود[۴] مانند ۱۱ و ۱۳۳ .

۱۰۱ـ زوج‌الزوج عددی است که بتوان آنقدر آن را نصف کرد تا به یک رسید[۵] مانند ۸ و ۱۶ (یعنی یکی از قوای صحیح عدد ۲) .

۱۰۲ـ زوج‌الزوج والفرد عددی است که زوج‌الزوج نباشد ولی بیش‌از یک بار بتوان آن را نصف کرد[۶] مانند ۱۲ و ۲۰ (یعنی حاصل‌ضرب یک عدد فرد در یکی از قوای عدد ۲) .

---

۱ ← اصطلاح کسرد راینجا باآنچه‌امروزه کسرمی‌نامیم اندک تفاوتی دارد. مثلاً ما امروزه $\frac{۳}{۵}$ راکسر و ۳ را صورت کسر و ۵ را مخرج کسر می‌نامیم ولی کاشانی ۳ را کسر و ۵ را مخرج می‌نامد .

۲ ← مفتاح ، ص ۸ : « المفردماوقع فی‌مرتبةواحده » .

۳ ← مفتاح ، ص ۸ : « وقدیسمی‌الواحدفی‌ای‌مرتبةکان‌بالمجرد » .

۴ ← مفتاح ، ص ۸ : « والمرکب‌ماوقع فی‌مرتبتین‌اوازید » .

۵ ← مفتاح ، ص ۸ : « زوج‌الزوج وهومایقبل‌التنصیف‌الی‌الواحد » .

۶ ← **التفهیم** ، ص ۳۵ : « زوج‌الزوج والفرد کدامست ؟ این آن است که به‌دو نیم بیش از یک بار شود و به یکی نرسد » .

۱۰۳- زوج‌الفرد عددی است که فقط یک‌بار بتوان‌آن را نصف کرد[1] مانند ۱۰ و ۳۰ (یعنی حاصل‌ضرب یک عدد فرد در ۲) .

نگاهی به‌بابهای اول و دوم ازمقالهٔ اول مفتاح‌الحساب

۱۰٤- ‏درآغازاین باب **کاشانی** می‌گوید که‌حکمای هند برای **عقود**[2] نه گانهٔ معروف نه رقم وضع کرده‌اند به‌این‌صورت ۱ و ۲ و ۳ و ٤ و ٥ و ٦ و ۷ و ۸ و ۹ و سپس مراتب را تعریف می‌کند و می‌گوید : « مراتب عبارت‌است از مواضع ارقام متوالی از راست به چپ روی یک سطر و موضع اول را **مرتبهٔ یکان** و موضع سمت چپ آن را مرتبهٔ **صدگان** گویند ... » و بعد می‌نویسد : « و بدان که هرصورتی از صورتهای نه گانه اگر در مرتبهٔ اول واقع شود علامت یکی از اعداد یک تا نه است و اگر در مرتبهٔ دوم واقع شود علامت یکی از عقود نه گانهٔ عشرات است که عبارتند از ۱۰ و ۲۰ و ... و ۹۰ و اگر در مرتبهٔ سوم واقع شود علامت یکی از

۱ ← **التفهیم**، ص ۳٥ : « زوج‌الفرد کدامست؟ این‌آن‌است که یک بار به‌دونیم شود و بس و به یکی برسد » .

۲ ← عقود جمع عقد (به فتح عین وسکون قاف) به معنی گره و بند است. **کاشانی** اصطلاح « عقد » را بـرای هریک از اعداد یک تـا نه و اصطلاح « رقم » را برای هریک از علامات ۱ و ۲ و ... و ۹ به‌کار برده‌است وچنانکه خواهیم‌دید بعداً ازعقودنه‌گانهٔ عشرات (یعنی ۱۰ و ۲۰ و ... و ۹۰) وعقود نه گانهٔ مآت (یعنی ۱۰۰ و ۲۰۰ و ... و ۹۰۰) گفتگو می‌کند ؛ و نیز رجوع کنید به **گاندز** G ، صفحات ٤۰۲ تا ٤۰۷ (درآنجا شرح جامعی دربارهٔ استعمال اصطلاح **عقود** درمنابع اسلامی نوشته شده) و **کارادوو** A (در آنجا عقد را به‌کسر عین گرفته است) .

بیرونی در کتاب ماللهند (چـاپ ساخـائو ، متن عربی ، ص ۸۳) نـوشته است : « و مما اتفق‌علیه‌جمیع الاسم‌فی‌الحساب هوتناسب عقوده علی‌الاعشار . فمامن‌مرتبه فیه‌الا و واحدها عشرواحدالتی‌بعدها وعشرة اضعاف‌واحدالتی‌قبلها » پس بنابه گفتهٔ **بیرونی** ، اگر a یکی ازارقام ۱ تا ۹ باشد، هرعقد به‌صورت $a \times 10^{n}$ و واحدهرعقد به‌صورت 10^{n} است.

عقود نه گانهٔ مات‌است و به همین قیاس[۱] » .

۱۰۵ـ کاشانی در این باب از صفر به عنوان **رقم** یا **عدد** نام نمی‌برد اما بعد ازتعریف مراتب می‌نویسد : « وهرمرتبه‌ای که‌درآن عدد نباشد واجب‌است که در آن صفری به‌شکل دایرهٔ کوچک قراردهیم تا آنکه خللی درمراتب حاصل نگردد[۲]» و نیز درباب دوم مقالهٔ اول مفتاح درضمن شرح عمل « تنصیف » وقتی می‌خواهد عدد ۴۰۰۰۰۵۲۷ را نصف کند می‌گوید : « ٤ را نصف می‌کنیم می‌شود ۲ و آن را زیر ٤ قرار می‌دهیم **وچون صفرنصف ندارد**[۳] زیر آن یک صفر قرار می‌دهیم ... » پس دراینجاهم **کاشانی** صفر را عدد نمی‌شمرد ونمی‌گوید که نصف صفر صفر است .

۱۰۶ـ اما با این‌حال درباب سوم مقالهٔ اول‌مفتاح، هنگامی که از ضرب کردن دوعدد درهم گفتگو می‌کند ، می‌گوید: «هرمرتبه‌ای که درآن صفر واقع‌باشد ... درحاصل‌ضرب جزء نظیر آن‌صفری قرار می‌دهیم، زیرا **حاصل‌ضرب صفر درهرعدد دیگر صفراست**[٤] » ، پس کاشانی دراین موضع صفر را عدد می‌شمرد ، و ازاین هم مهمتر آن است که چنانکه بعداً خواهیم دید ، وی صفر را به عنوان **نمایندهٔ قوه**

---

۱ ← مفتاح ، ص ۹ .

۲ ← مفتاح ، ص ۹ - بیرونی درالتفهیم (ص ٤۷) می‌نویسد : « و چون مرتبه‌ای خالی‌باشد ازعددی، به‌جای اونشانی‌کنند ازبهرنگاهداشتن او را که تهی است ولی ما او را دایره‌ای‌خرد کنیم واو را صفر نام کنیم ، یعنی تهی‌وهندوان او را نقطه کنند » ـ ضمناً معلوم می‌شود که ایرانیان از قدیم صفر را به‌صورت دایره می‌نوشته‌اند و عادت ناپسند نوشتن نقطه به‌جای صفر بعداً پیدا شده‌است و وقتی آقای دکتر **مصاحب** در دایرة‌المعارف فارسی وسایر تألیفات‌خودصفر را به‌صورت (0) می‌نویسد تا با نقطه وعلامت درجه (°) اشتباه نشود کاملا حق دارد وخرده‌هائی که به‌ایشان گرفته‌اند بیجاست (← دایرة‌المعارف فارسی ، ص ۱۳) .

۳ ← مفتاح ، ص ۱۰ : « ولان‌لیس‌للصفرنصف » .

٤ ← مفتاح ، ص ١٤ : « لان‌ضرب‌الصفر فی‌أی‌عدد یکون صفراً » .

به‌کار برده و به‌آن معنی یک عدد واقعی داده است[۱] .

۱۰۷ـ درباب دوم مقالهٔ اول مفتاح ، **کاشانی** چگونگی اعمال تضعیف (دو برابر کردن) و تنصیف (تقسیم بردو) وجمع و تفریق را شرح می‌دهد .

این مطلب درخور توجه‌است که ، با وجود اینکه عمل تضعیف حالت‌خاصی ازعمل ضرب (ضرب در ۲) وعمل تنصیف حالت‌خاصی ازعمل تقسیم (تقسیم‌بر ۲) است ، دربیشترکتابهای حساب دورهٔ اسلامی ، مانندکتاب حساب تألیف **محمدبن موسی خوارزمی** (قرن‌سوم هجری) وکتاب « فی‌اصول حساب‌الهند » از **کوشیاربن لبان گیلانی** (قرن چهارم هجری) و کتاب «شمارنامه» از **محمدبن‌ایوب طبری** (قرن پنجم هجری) و کتاب « المقنع‌فی‌الحساب‌الهندی » از **علی‌بن‌احمد نسوی** (قرن پنجم هجری) تا « مفتاح‌الحساب » **کاشانی** (قرن‌نهم هجری) وحتی‌کتاب «عیون‌الحساب» **ملامحمدباقریزدی** (قرن یازدهم هجری) ، این دوعمل‌جداگانه درنظر گرفته شده است[۲] .

نگاهی به‌باب سوم مقالهٔ اول مفتاح‌الحساب

۱۰۶ـ درآغاز این باب **کاشانی** عمل ضرب عددهای صحیح را چنین تعریف می‌کند : « ضرب کردن دوعدد صحیح عبارت از یافتن امثال یکی از آن دو عدد است به عدهٔ آحاد عدد دیگر[۳] ، و اضافه می‌کندکه تعریف جامع عمل‌ضرب این است : « ضرب کردن دوعدد به دست آوردن عددی است‌که نسبت آن به یکی از آن دوعدد مساوی باشد با نسبت دیگری به واحد[٤] » .

۱ ← ش ۲۲۰ کتاب حاضر ـ و نیز رجوع کنید به‌لوکی R : ص ۱۸ .

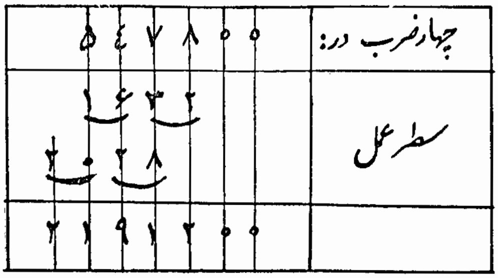
۲ ← برای‌کسب اطلاع دربارهٔ تاریخچه این دوعمل رجوع کنید به سمیث H : ج ۲ ص ۳۳ .

۳ ← **مفتاح**، ص ۱۲ : «فی‌الضرب وهوفی‌الصحاح‌طلب امثال احدالعددین بعدة الاخر» .

٤ ← **مفتاح**، ص ۱۲ : «والتعریف‌الجامع هوتحصیل عدد یکون نسبته الی احدالمضروبین کنسبة‌المضروب‌الاخرالی‌الواحد» .

۱۰۷ـ سپس **کاشانی** چند قاعده برای عمل ضرب ذکر می‌کند و برای هرکدام مثالی می‌آورد .

مثال ۱ـ برای ضرب کردن عدد ۵۴۷۸۰۰ درعدد یک‌رقمی ٤ حاصل ضربهای جزء یعنی ۸ × ٤ = ۳۲ و ۷ × ٤ = ۲۸ و ٤ × ٤ = ۱٦ و ٤ × ۵ = ۲۰ را طوری مطابق با جدول زیر در دوسطر می‌نویسد که هریک از ارقام آنها به محاذات رقم هم‌سرتبهٔ خود در عدد ۵٤۷۸ قرار گیرد و پس از جمع کردن اعداد حاصل ، صفرها را درمقابل حاصل‌جمع فرود می‌آورد[۱] .

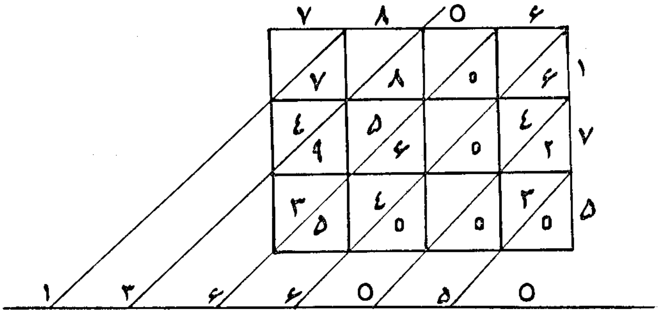


۱۰۸ـ تبصره ـ کاشانی دراینجا بـه این مطلب اشاره نمی‌کند کـه می‌توان یک عدد یک رقمی را دریک عدد چند رقمی همانگونه کـه امروزه متداول است از راست بـه چپ ضرب کرد و نتیجه را نوشت . اما با اینکه وی این روش را برای مبتدیـان تشریح نمی‌کند ، می‌توان یقین داشت کـه خود او این طریقه را به‌کار می‌بسته است . زیرا بعداً خواهیم دید که **کاشانی** همین روش را برای ضرب کردن یک عدد یک رقمی دریک عدد چند رقمی درموقع انجام دادن عمل تقسیم به‌کار می‌بـرد ، و علاوه براین در دستگـاه شمار شصتگـانی همین روش را توصیه می‌کند و آن را برای کسانی که مبتدی نیستند راه ساده‌ای می‌داند .

۱۰۹ـ مثال ۲ـ سپس **کاشانی** به‌بیان قاعدهٔ ضرب دوعدد چند رقمی می‌پردازد

۱ ← مفتاح ، ص ۱۳

و حاصل‌ضرب ۱۷۵ × ۷۸۰۶ را به وسیلهٔ **شبکهٔ ضرب** مطابق باشکل زیر به دست سی‌آورد[۱] :



۱۱۰ـ شبکهٔ ضرب را **کاشانی** ازپیشینیان گرفته ودر دیباچهٔ «مفتاح‌الحساب» خود به‌این سوضوع اشاره کرده است[۲] ، وعلاوه‌براین درآخر باب سوم نوشته‌است: « وهرچه دراین باب‌هست ما خود استنباط کرده‌ایم ، مگر شبکهٔ اول[۳] .

شرح **شبکهٔ ضرب** با اندك تفاوتی در کتاب «تلخیص اعمال‌الحساب» تألیف **ابن‌البناء مراکشی** از ریاضیدانان عرب اسپانیائی که درنیمهٔ دوم قرن هفتم و اوایل قرن هشتم هجری‌قمری(درحدود یک‌قرن‌قبل‌از **کاشانی**) سی‌زیسته دیده سی‌شود[٤] . اما **ابن‌البنا** به‌جای « شبکه » آن را « جدول » نامیده است .

۱۱۱ـ کاشانی « شبکهٔ ضرب » را که ازپیشینیان خود گرفته به‌صورت بهتری درآورده و آن‌را « شبکهٔ سورب » نامیده‌است ، و حاصل‌ضرب ۶۲٤ × ۳۰۸ را مطابق با شکل زیر حساب کرده است[۵] :

---

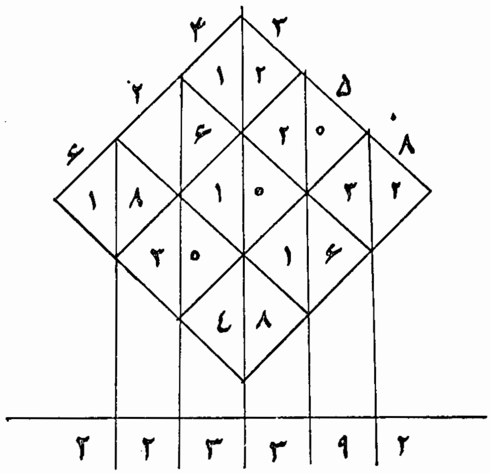
۱ ← **مفتاح** ، ص ۱۵ .

۲ ← **مفتاح**، ص ۳ ـ ورجوع کنید به‌ترجمهٔ دیباچهٔ مفتاح‌الحساب درکتاب‌حاضر ، صفحهٔ ۵۰ .

۳ ← **مفتاح**، ص ۱۸ : « وجمیع‌مافی‌هذا الباب‌مما‌استنبطته‌سوی‌الشبکة‌الاولی» .

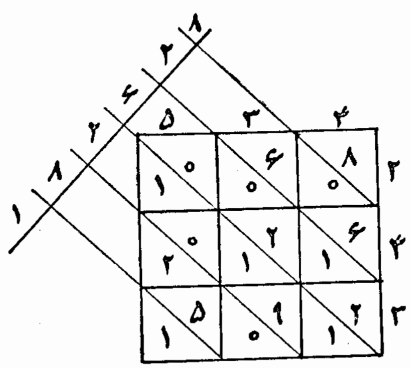
٤ ← **اریستیدمار** T ، ص ۳۰۰ .

۵ ← **مفتاح** ، ص ۱۶ .



و باز همین حاصل‌ضرب را بدون رسم کردن خطوط شبکه درمثال ٤ به دست آورده است[۱] .

۱۱۲ـ همین «شبکهٔ سورب» با اندك اختلافی در کتاب «کشف‌الاسرارعن‌علم حروف الغبار» تألیف **علی‌قلصادی** متوفی به‌سال ۸۹۱ (۱٤۸٦) که از ریاضیدانان عرب اندلسی و تقریباً تا ٦۰ سال بعد ازکاشانی زنده بوده است دیده می‌شود . وی حاصل‌ضرب ۵۳٤ × ۳٤۲ را به شکل زیر به‌دست آورده[۲] .



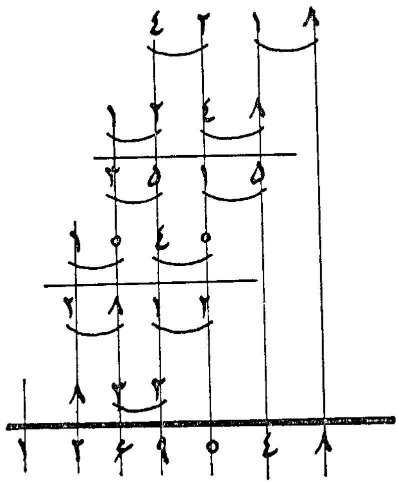
---

۱ ← **مفتاح**، ص ۱۷ .

۲ ← **ویکه** T ، ص ١٤ .

و با اندک دقتی رجحان شبکهٔ مورب کاشانی برشبکهٔ فوق دیده می‌شود .

۱۱۳- مثال ۵- بالاخره **کاشانی** حاصل‌ضرب ۲۷۸۳ × ۴۵۶ را مطابق باشکل زیر به‌دست آورده‌است[۱] .



در این مثال حاصل ضربهای جزء یعنی ۶ × ۲۷۸۳ و ۵ × ۲۷۸۳ و ۴ × ۲۷۸۳ به وجهی که درمثال ۱ (ش ۱۰۷) ذکر شد نوشته شده است .

کاشانی درپایان این مثال می‌نویسد : « دلیل صحت این عمل برمرد هوشمند، اگر درآن تأمل کند ، پوشیده نیست ، و این نوع از سایر انواع آسانتر می‌باشد جز اینکه طریقهٔ شبکه به فهم مبتدیان نزدیکتر است[۲] .

نگاهی به باب چهارم مقالهٔ اول مفتاح‌الحساب

۱۱۴- درآغاز این باب **کاشانی** تقسیم را چنین تعریف می کند : درمورد عددهای صحیح عمل تقسیم عبارت است از تجزیهٔ مقسوم به اجزای متساوی که عدهٔ آنها مساوی با آحاد مقسوم‌علیه باشد - هریک از این اجزا را خارج قسمت می‌نامند » ، و اضافه می کند که تعریف جامع عمل‌تقسیم این است: « تقسیم‌عبارت

۱ ← **مفتاح** ، ص ۱۷ .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۱۷ .

از به دست آوردن عددی است که نسبت آن به واحد مساوی با نسبت مقسوم به مقسوم علیه باشد ، ویا به دست آوردن عددی است که نسبت آن به مقسوم مساوی با نسبت واحد به مقسوم علیه باشد[۱] .

۱۱۵ـ سپس **کاشانی** به بیان قاعدهٔ عمل تقسیم می‌پردازد و روشی را که از قدما گرفته و خود تصرفاتی درآن کرده است شرح می‌دهد ، و به عنوان مثال تقسیم عدد ۹۰۸ ٥٦٥ ۳ رابرعدد ٤٧٥ به‌دونوع ، وهرنوع را به‌دوصورت که باهم مختصر تفاوتی دارند ، انجام می‌دهد ، و سپس به شرح روشی که خود اختراع کرده است می‌پردازد .

ما این روش را که از اختراعات کاشانی وتقریباً با روش معمولی کنونی شبیه است ، دراینجا به‌اختصار بیان می‌کنیم[۲] :

۱۱٦ـ روش کاشانی درعمل تقسیم[۳] ـ مقسوم را می‌نویسیم و خطی افقی در بالای آن رسم می‌کنیم و ارقام آن را به وسیلهٔ خطهای قائم ازهم جدا می‌سازیم . اگر رقم سمت چپ مقسوم‌علیه از رقم سمت چپ مقسوم کوچکتر بود ، مقسوم‌علیه را درپایین مقسوم به‌فاصله‌ای که مناسب باشد به‌قسمی می‌نویسیم که ارقام آن به‌محاذات ارقام سمت چپ مقسوم قرارگیرند ، و درغیر این‌صورت (یعنی مثلاً درتقسیم عدد ۱۲٦ ۲۷٤ ۲ برعدد ٥٦٥) مقسوم علیه را درپایین مقسوم وبا فاصلهٔ مناسب‌طوری

---

۱ ← **مفتاح** ، ص۱۸ : « فی القسمة وهی فی الصحاح تجزیة المقسوم بآحاد المقسوم علیه تجزیة متساویة العدة لیتعین حصة الواحد من المقسوم علیه ویسمی تلک الحصة خارج القسمة و و تعریفها الجامع انها تحصیل عدد نسبته الی الواحد کنسبة المقسوم الی المقسوم علیه او تحصیل عدد نسبته الی المقسوم کنسبة الواحد الی المقسوم علیه » .

۲ ← کسانی که بخواهند اطلاعات بیشتری دربارهٔ سایر انواع عمل تقسیم کسب کنند می‌توانند به مفتاح الحساب چاپی صفحات ۱۸ تا ۲٥ رجوع کنند.

۳ ← ما روش کاشانی را شرح داده آن‌را درمورد مثال ٥٦٥ : ۱۲٦ ۲۷٤ ۲ عمل می‌کنیم ← **مفتاح** ، ص ۲۳ به بعد .

خارج قسمت:

خارج قسمت	۵	۲	۰	٤				
	٦	۲	۱	٤	۷	۲	۲	مقسوم نخستین مقسوم جزء
				۰	٦	۲	۲	← ٤ × (مقسوم علیه)
۱٤ = نخستین باقیماندهٔ جزء			۱	٤	۱			← دومین مقسوم جزء
			۰	۰	۰			← ۰ × (مقسوم علیه)
۱٤۱ = دومین باقیماندهٔ جزء		۲	۱	٤	۱			← سومین مقسوم جزء
		۰	۳	۱	۱			← ۲ × (مقسوم علیه)
۲۸۲ = سومین باقیماندهٔ جزء	۵	۲	۸	۲				← آخرین مقسوم جزء
آخرین باقیمانده	۱							
آخرین وضع مقسوم علیه	۵	٦	۵					
سومین وضع مقسوم علیه		۵	٦	۵				
دومین وضع مقسوم علیه			۵	٦	۵			
اولین وضع مقسوم علیه				۵	٦	۵		

می‌نویسیم که ارقام آن به محاذات ارقام سمت چپ مقسوم به استثنای آخرین رقم سمت چپ آن قرار گیرد (این نخستین وضع مقسوم‌علیه درجدول است) ، سپس اولین رقم سمت چپ خارج قسمت (یعنی ۴) را (مطابق با قاعدهٔ کنونی) می‌یابیم وآن را در خارج جدول بالای خط افقی مرسوم به محاذات رقم سمت راست مقسوم‌علیه (یعنی رقم ۴ در مقسوم) می‌نویسیم و آن را درمقسوم‌علیه (یعنی ۵۶۵) ضرب و حاصل (یعنی ۲۲۶۰) را از قسمتی از مقسوم که به محاذات مقسوم‌علیه قرار دارد (یعنی از ۲۲۷۴) کم می‌کنیم ، و باقیمانده (یعنی ۱۴) را که نخستین باقیماندهٔ جزء است می‌نویسیم . سپس دربالای نخستین وضع مقسوم‌علیه خطی افقی رسم می‌کنیم ومقسوم‌علیه را یک‌رقم به‌طرف راست انتقال می‌دهیم و دربالای وضع قبلی مقسوم‌علیه می‌نویسیم . اگر فرض کنیم که رقم بعدی مقسوم (یعنی ۱) را درسمت راست اولین باقیماندهٔ جزء (یعنی ۱۴) فرود آورده باشیم، دومین مقسوم جزء (یعنی ۱۴۱) درست به محاذات دومین وضع مقسوم‌علیه قرار می‌گیرد . سپس دومین رقم سمت چپ خارج قسمت (یعنی صفر) را پیدا می‌کنیم و آن را در سمت راست رقم قبلی خارج قسمت (یعنی ۴) می‌نویسیم و عمل را مطابق با جدول ادامه می‌دهیم .

۱۱۷ـ این مطلب درخور توجه است که تنها تفاوتی که روش تقسیم **کاشانی** با روش کنونی دارد این است که ما امروزه مقسوم‌علیه را درسمت راست مقسوم‌طوری می‌نویسیم که بامقسوم روی یک‌سطرقرار گیرد درصورتی که **کاشانی** هربارمقسوم‌علیه را یک رقم به سمت راست انتقال می‌دهد به قسمی که هریک از مقسوم‌های جزء درست به‌محاذات مقسوم‌علیه درهمان تقسیم جزء قرار می‌گیرد .

۱۱۸ـ کاشانی باز همین عمل تقسیم را به‌طرز جالب توجه دیگری انجام می‌دهد[1] و آن این است که ، به‌جای آنکه هربار مقسوم‌علیه را یک رقم به سمت راست انتقال دهد ، مقسوم‌های جزء را یک رقم به سمت چپ منتقل می‌نماید و با این تدبیر مقسوم‌علیه را یک بار بیشتر نمی‌نویسد به‌این‌صورت :

۱ ← **مفتاح** ، ص ۲۴ .

				٤	٥	٢	۵	خارج قسمت
ولین مقسوم جزء	٢	٢	٧	٤	١	٢	۶	مقسوم
	٢	٣	۶	٥				
			١	٤				نخستین باقیمانده جزء
دوسین مقسوم جزء		١	٤	١	٢	۶		دومین باقیماندهٔ جزء ۱۴۱۲ است که در
سوسین مقسوم جزء	١	٤	١	٢	۶			جدول ثبت نشده است
	١	١	٣	٥				
		٢	٨	٢				سومین باقیماندهٔ جزء
آخرین مقسوم جزء	٢	٨	٢	۶				
	٢	٨	٢	۵				
				١				آخرین باقیماندهٔ جزء
		۵	۶	۵				مقسوم علیه

کاشانی درپایان این باب خاطرنشان می‌کند که دو روش اخیر از استنباطات خود اوست[1] .

۱ ← **مفتاح**، ص ٢٤ : « وهذان النوعان مما استنبطناه » .

نگاهی به باب پنجم ازمقالهٔ اول مفتاح‌الحساب

۱۹۱ـ این باب ازمفتاح‌الحساب مختص به‌استخراج ریشه n ُم اعداد صحیح است. **کاشانی** دراین باب قوای اعداد و ریشه‌ها را تعریف می‌کند و اصطلاحاتی به‌کار می‌برد که به زبان امروزی چنین بیان می‌شود[۱] :

اصطلاح قدیمی	مفهوم آن	معادل کنونی آن
ضلع اول	عدد a درمقام‌مقایسه با a^2وa^3و...a^n	پایه = ریشه
جذر	عدد a درمقام مقایسه با a^2	جذر = ریشهٔ‌دوم
کعب	عدد a درمقام مقایسه با a^3	کعب = ریشهٔ‌سوم
مجذور = مال = مربع	قوهٔ دوم عدد	a^2
مکعب (کعب)[۲]	قوهٔ سوم عدد	a^3
مال‌مال	قوهٔ چهارم عدد	a^4
مال کعب	قوهٔ پنجم عدد	a^5
کعب کعب[۳]	قوهٔ ششم عدد	a^6
جزءالجذر		$\frac{1}{a}$
جزءالمال		$\frac{1}{a^2}$
جزءالکعب		$\frac{1}{a^3}$
جزء مال‌المال		$\frac{1}{a^4}$
منزل	قوه	

۱ ← **مفتاح**، ص ۲۵ .

۲ ← شمارهٔ ۱۲۰ کتاب حاضر .

۳ ← برای نامیدن قوای بعدی رجوع کنید به شمارهٔ ۱۲۱ کتاب حاضر .

عدد منزل	نمای قوه
مضلع (درجمع مضلعات)	قوهٔ یک عدد یا به‌وجه اعم عددی که باید ازآن ریشهٔ n ُم استخراج کرد
مضلع مُنطق	عددی که ریشهٔ n ُم درست‌داشته‌باشد
مضلع اصم	عددی که‌ریشهٔ n ُم درست‌نداشته‌باشد

۱۲۰ـ کاشانی می‌گوید که قوهٔ سوم (a^3) را **مکعب** و نیز **کعب** می‌گویند، وبهتراست که‌ریشهٔ‌سوم **کعب** گفته‌شود، و کعب رامجازاً به‌قوهٔ‌دوم اطلاق کرده‌اند[۱]. **بیرونی** در التفهیم (ص ۴۳) می‌نویسد: «وگروهی از بهر سبک کردن سخن «مکعب» را «کعب» خوانند وآنگه ناچار کعبش‌را «ضلع» باید خواند تامشتبه نشود».

۱۲۱ـ دیدیم که قوهٔ ششم را «کعب کعب» نامیده‌است. برای نامیدن‌قوای بعدی قاعده آن است که نخستین لفظ «کعب» را به «مال‌مال» تبدیل کنند تا قوهٔ بعدی به‌دست آید و سپس به ترتیب یکی از «مال» ها را به «کعب» وبعد «مال» دیگر را نیز به «کعب» تبدیل کنند و همواره لفظ مال را برلفظ کعب مقدم دارند وقس‌علی‌هذا.

بنابراین قوهٔ هفتم می‌شود «مال‌مال کعب» و قوهٔ هشتم می‌شود «مال کعب کعب» و قوهٔ نهم «کعب کعب کعب» قوهٔ دهم «مال‌مال کعب کعب» وغیره

۱۲۲ـ کاشانی می‌نویسد که جذر در منزل اول و مال درمنزل دوم و کعب درمنزل‌سوم است‌واگربخواهیم‌عددمنزل (= نمای) یک‌مضلع (= قوه) رابدانیم باید برای هر «مال» عدد ۲ و برای هر «کعب» عدد ۳ را بگیریم و همهٔ اعداد

---

۱ ـ **مفتاح**، ص ۲۵ سطر ۹: «والحاصل‌الثانی مکعباوکعباً ایضا باسم‌الضلع کماقیل‌والاولی ان‌یقول‌ان‌الکعب اسم‌الضلع‌قدیطلقونه‌علی‌المضلع‌مجازاً (درمفتاح‌چاپی کلمهٔ ماقبل‌آخر این عبارت اشتباهاً «علی‌الضلع» چاپ شده است)».

حاصل را با هم جمع کنیم . مثلاً عدد منزل «مال‌مال کعب» عدد ۷ و عدد منزل «مال‌مال کعب کعب» عدد ۱۰ است (مفتاح ، ص ۲۵) .

۱۲۳ـ هرگاه عدد منزل را داشته باشیم و بخواهیم اسم مضلع را بیابیم اگر آن عدد بر ۳ قسمت‌پذیر باشد آن را بر ۳ تقسیم‌می‌کنیم وبه عدهٔ آحاد خارج‌قسمت لفظ «کعب» را تکرار می‌کنیم . مثلاً اگر عدد منزل ۹ باشد اسم مضلع «کعب کعب کعب» است .

اما اگر عددمنزل بر ۳ قسمت‌پذیر نباشد، آن‌قدر عدد ۲ را ازآن کم‌می‌کنیم تا بر ۳ قسمت‌پذیر شود و به‌ازای هر ۲ یک‌لفظ «مال» وبه عدهٔ آحاد خارج‌قسمت تقسیم باقیمانده بر ۳ لفظ «کعب» را می‌گوییم و «مال» ها را بر «کعب» ها مقدم می‌داریم . مثلاً اگر عدد منزل ۸ باشد اسم مضلع «مال کعب کعب» و اگر عدد منزل ۷ باشد اسم مضلع «مال‌مال کعب» است (مفتاح ، ص ۲۶) .

۱۲٤ـ سپس **کاشانی** اصطلاح «مضلع» را که قبلاً به‌عنوان اسم عام برای قوای اعداد به کار برده بود ، برای‌عددی به کارمی‌برد که ریشهٔ n اُم آن موردنظر است و می‌نویسد: «هرعدد که ریشهٔ n اُم درست‌داشته باشد آن را «مضلع مُنطق» می‌نامند واگر ریشهٔ n اُم درست نداشته باشد آن‌را «مضلع اصم[۱]» می‌گویند .

بنا به‌تعریف فوق مثلاً عدد ۸۱ از حیث جذر مضلع مُنطق‌است زیرا ریشهٔ دوم (جذر) درست آن عدد ۹ می‌باشد . همین عدد باز ازحیث ریشهٔ چهارم منطق است زیرا ریشهٔ چهارم درست آن عدد ۳ است. اما ۸۱ مثلاً از حیث ریشهٔ سوم و ریشهٔ پنجم دیگر مضلع مُنطق نیست .

۱۲۵ـ مؤلف سپس می‌افزاید[۲] : «مضلع های منطق همه درمرتبهٔ احاد

---

۱ ← **مفتاح** ، ص ۲٦ : «فاعلم‌ان کل‌مضلع یوجدله‌ضلع یتولد ذلک‌المضلع‌منه بالحقیقة ، یقال‌له‌انه‌منطق ، ومالا یوجدله‌ضلع کذلک ، یقال‌له‌اصم» .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۲٦ : «والمضلعات‌المنطقة یقع‌جمیعها فی‌مرتبةالاحاد ...» دراین‌جاعبارات«مفتاح‌الحساب» راعیناً‌ترجمه کرده‌ام‌ودرشمارهٔ ۱۲٦ مطلب‌را توضیح داده‌ام .

واقع می‌شوند و اسوال منطق درمرتبهٔ دهگان قرار نمی‌گیرند بلکه درمرتبهٔ صدگان واقع می‌شوند و درمرتبهٔ هزارگان قرار نمی‌گیرند بلکه در مرتبهٔ ده هزارگان واقع می‌شوند . اما مکعب در مرتبهٔ هزارگان و سپس در مرتبهٔ هزار هزارگان قرار می‌گیرد . وطریقهٔ شناسائی این آن است که از مرتبهٔ آحاد شروع کنیم و مراتب را به عدهٔ منزلهای هرمضلعی (= نمای هرقوه‌ای) که می‌خواهیم بگیریم وآن‌را **دور منطق و اصم** بنامیم و سپس دور دیگری به‌همان عده بگیریم **و** عمل را ادامه دهیم . آن مضلع درمرتبهٔ اول هردور منطق ودرباقی مراتب اصم است. ازاین رو معلوم‌می‌شود که مجذور دریک‌مرتبه واقع‌می‌شود ودرمرتبهٔ بعدی‌آن واقع نمی‌شود، و مکعب دریک مرتبه واقع می‌شود و در دومرتبهٔ بعدی واقع نمی‌شود ، و مال‌مال دریک مرتبه واقع می‌شود و درسه مرتبهٔ بعد ازآن واقع نمی‌شود وقس‌علی‌هذا» .

۱۲۶ـ توضیح ـ کاشانی دراینجا اصلاح **دور** راکه جمع عربی‌آن **ادوار** است به‌کارمی‌برد، به‌این‌مفهوم که اگر ازعددی مثلاً بخواهیم ریشهٔ سوم بگیریم ارقام آن عدد را از سمت راست سه به سه جدا می‌کنیم وهردستهٔ سه رقمی‌را دورمی‌نامیم و اگر از همان عدد بخواهیم ریشهٔ چهارم استخراج کنیم ارقام آن را از سمت‌راست چهار به‌چهار جدامی کنیم . این‌بار هر **دور** دارای چهار رقم‌است، زیرا می‌خواهیم از عدد ریشهٔ چهارم بگیریم .

مؤلف می‌گوید عددی که می‌خواهیم ازآن ریشه بگیریم درمرتبهٔ **اول** هردور **منطق** و درمرتبه‌های دیگر آن دور **اصم** است .

مثلاً اگر بخواهیم از عدد ۷۹۳۰۲۸۴۰۶۱ ریشهٔ چهارم استخراج کنیم ، ارقام آن را ازسمت راست چهار به چهار جدا می‌کنیم :

۷**۹**، ۳۰۲**۸**، ۴۰۶**۱**

۴۰۶۱ دور اول و رقم **۱** درمرتبهٔ اول آن واقع است. عدد ۳۰۲۸ دوردوم است و رقم **۸** درمرتبهٔ اول آن قرار دارد .

ارقامی که با حروف سیاه چاپ شده‌اند، یعنی ارقام ۱ و ۸ و ۹ ، بنا به گفتهٔ **کاشانی** برای ریشهٔ چهارم در مرتبه های منطق واقعند و بقیهٔ ارقام برای همان ریشه در مرتبه های اصم قرار دارند.

برای توضیح این مطلب **مفردات منطق**[1] را درنظر می‌گیریم : اعداد ۱ و ٤ و ۹ و ۱۰۰ و ٤۰۰ و ۹۰۰ و ۱۰۰۰۰ و ٤۰۰۰۰ و ۹۰۰۰۰ ونظایرآنها ازحیث ریشهٔ دوم مفردات منطق هستند زیرا همه هم مفرد هستند وهم جذر درست دارند. دیده می‌شود که ارقام سمت چپ این اعداد یا در مرتبهٔ یکان هستند یا در مرتبهٔ صدگان و یا در مرتبهٔ ده هزارگان و نظایر آنها وعدد مفردی که جذر درست داشته باشد رقم سمت چپش جز درمراتب مذکور واقع نمی‌شود.

همچنین اعداد ۱ و ۸ و ۱۰۰۰ و ۸۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰۰ و ۸۰۰۰۰۰۰ و نظایر آنها از حیث ریشهٔ سوم « مفردات منطق » هستند زیرا همه هم مفرد هستند و هم ریشهٔ سوم درست دارند. دیده می‌شود که ارقام سمت چپ این اعداد یا در مرتبهٔ یکان واقع هستند ویا درمرتبهٔ هزارگان و یا درمرتبهٔ هزار هزارگان ویا نظایرآنها، و عدد مفردی که ریشهٔ سوم درست داشته باشد رقم سمت چپش جز درمراتب مذکور واقع نخواهد شد.

۱۲۷ـ استخراج جذر ـ سپس **کاشانی** به شرح استخراج جذر می‌پردازد وروشی را که از پیشینیان اقتباس کرده و آن را منقح ساخته بیان می‌کند ، و باز درهمین روش تصرفاتی کرده آن را به صورت ساده‌تر درمی‌آورد[2] ، به وجهی که اختلاف روش وی با طریقه‌ای که امروزه برای گرفتن جذر مرسوم است بسیار کم می‌باشد . از دو روشی که **کاشانی** برای استخراج جذر ذکر کرده ، دومی ، بنابه گفتهٔ خود او ، در حالتی که عدهٔ ارقام عدد زیاد باشد ، آسانتر است .

---

۱ ــ برای تعریف عددهای مفرد رجوع کنید به شمارهٔ ۹۸ کتاب حاضر .

۲ ← **مفتاح**، ص ۲٦ تا ۲۸ .

۱۲۸ـ اکنون مثال استخراج جذر عدد ۳۳۱ ۷۸۱ را با روش ساده شدهٔ **کاشانی** در اینجا نقل می‌کنیم وسپس به شرح آن می‌پردازیم. جذر این عدد ۵۷۶ وباقیماندهٔ آن ۰ است.

ردیف جذر ←	۵		۷		۶	
۳	۳	۱	۷	۸	۱	← عددی که باید جذر آن را گرفت
۲	۵					
	۸					
	۷	٤	۹			
		۶	۸			
		۶	۸	۷	۶	
					۵	
		۱	۱	٤	۶	
	۱	۰				
			۷			
	۵					

عدد ۸۱ ۱۷ ۳۳ را از سمت راست به دورهای دورقمی جدا می‌کنیم. برای تشریح عمل استخراج جذر به پیروی از **لوکی**[۱] عدهٔ صدگان جذر (یعنی [. .]**۵**) را با حرف a [۲] و عدهٔ دهگـان آن (یعنی [.]۷) را با حرف b و رقم یکان آن را

۱ ← لوکی R : ص ۲۳ .

۲ ← جذر مطلوب ۵۷۶ وصدگان آن ۵۰۰ است که آن را با حرف a نشان می‌دهیم ولی چون فقط رقم سمت چپ آن یعنی ۵ درضمن عمل نوشته می‌شود آن را به‌صورت [۰۰]**۵** نوشته‌ایم. بنابراین در این قسم نوشتن کروشه علامت ضرب نیست .

با حرف c نشان می‌دهیم[۱] .

ابتدا بزرگترین عدد صحیح a را قسمی می‌یابیم که داشته باشیم:

$$a^{۲} \leqslant q = \mathbf{۳۳}[۱۷۸۱]$$

به‌این‌ترتیب عدد $a = \mathbf{۵}[۰۰]$ حاصل می‌شود . این عدد را در ردیف جذر در مرتبهٔ اول دور سوم می‌نویسیم ، و همچنین به محاذات آن درپایین جدول درفاصلهٔ مناسب ثبت می‌کنیم . سپس $a^{۲} = \mathbf{۲۵}[۰۰۰۰]$ را از $q = \mathbf{۳۳}[۱۷۸۱]$ کم کرده حاصل یعنی $۸[۰۰۰۰]$ را در زیر $\mathbf{۳۳}[۱۷۸۱]$ می‌نویسیم . بعد دربالای رقم ۵ که درپایین جدول نوشتیم خطی افقی رسم و آن‌را از حوزهٔ عمل خارج می‌کنیم وبه‌جای آن عدد $۲a = \mathbf{۱۰}[۰۰]$ را یک رقم به‌طرف راست دربالای خط می‌نویسیم . آنگاه عدد b را قسمی جستجو می‌کنیم که[۲] :

$$(۲a + b)b \leqslant q - a^{۲}$$

یعنی :

$$\mathbf{۱۰}[۰۰]b + b^{۲} \leqslant \mathbf{۸۱۷}[۸۱]$$

و عدد $b = \mathbf{۷}[۰]$ را می‌یابیم . رقم ۷ را در مرتبهٔ اول دور دوم می‌نویسیم و همچنین آن‌را در پایین جدول درسمت راست ۱ ثبت می‌کنیم به‌این نحو عدد زیر بدست می‌آید :

$$۲a + b = ۱۰۷[۰]$$

و سپس :

$$(۲a + b)b = \mathbf{۱۰۷}[۰] \times \mathbf{۷}[۰]$$

را حساب می‌کنیم می‌شود [۰۰]۷۴۹ این‌عدد را از باقیماندهٔ اول (بادرنظرگرفتن دو رقم بعدی) یعنی ۸۱۷ کم‌می‌کنیم‌می‌شود **۶۸**[۰۰] . سپس دربالای **۱۰۷**[۰]

۱ ← به‌این‌ترتیب جذر به‌صورت $a+b+c = ۵۰۰ + ۷۰ + ۶$ درمی‌آید.

۲ — توجه‌کنید: $۲a+b$ یعنی $۱۰ \times b + [۰۰]۵ \times ۲$ زیرا ۵ رقم‌صدگان و b رقم دهگان است.

یک خط افقی رسم می‌کنیم و آن را از حوزهٔ عمل خارج می‌نماییم و درعوض عدد

$$2a+2b=114[0]$$

را یک رقم به‌طرف راست دربالای خط مذکور می‌نویسیم و بالاخره رقم c را قسمی جستجو می‌کنیم که داشته باشیم :

$$(2a+2b+c)c\leqslant q-a^2-(2a+b)b$$

یعنی :

$$1140c+c^2\leqslant 8661$$

و رقم $c=6$ را می‌یابیم و ۶ را که رقم یکان جذر است درمرتبهٔ یکان دور اول می‌نویسیم و مانند قبل رقم ۶ را نیز درپایین و درسمت راست [۰]۱۱۴ می‌نویسیم و

$$(2a+2b+c)c=6876$$

را از عدد ۶۸۸۱ کم می‌کنیم باقیماندهٔ جذر یعنی ۵ به‌دست می‌آید .

۱۲۹ـ بنابرآنچه گذشت استخراج جذرمبنی براتحاد زیر می‌باشد :

$$(a+b+c+\cdots)^2\equiv a^2+(2a+b)b+(2a+2b+c)c+\cdots$$

همانگونه که امروزه عمل می‌کنیم **کاشانی** حاصل‌ضربهای :

$$7\times 107=749 \quad \text{و} \quad 6\times 1146=6876$$

را در ذهن انجام می‌دهد وکم می‌کند

۱۳۰ـ اگر عددی جذر درست مانند $T=a+b+c+\cdots$ نداشته باشد **کاشانی** کسری به باقیماندهٔ جذر اضافه می‌کند و آن را **کسراصطلاحی** می‌نامد.

درمثال فوق **کاشانی** جذر عدد ۳۳۱۷۸۱ را مساوی‌با :

$$576\frac{5}{1153}$$

محسوب می‌دارد و آن را **جذر تقریبی اصطلاحی** می‌نامد[1] .

صورت کسر :

$$v=\frac{5}{1153}$$

---

۱ ← **مفتاح**، ص ۲۷ .

همان باقیماندهٔ جذر یعنی عدد ۵ است و مخرج آن به‌این‌طریق به‌دست می‌آید که آخرین عدد پایین جدول یعنی :

$$۲a+۲b+c=۱۱۴۶$$

را با ۶ (یعنی‌آخرین‌رقم جذر) جمع کرده ویک‌واحد به‌آن بیفزاییم. یعنی‌درواقع:

$$v=\frac{۵}{(۵۷۷)^{۲}-(۵۷۶)^{۲}}=\frac{۵}{۲\times ۵۷۶+۱}$$

به‌طورکلی اگر جذر به‌صورت :

$$T=a+b+c+\cdots$$

و باقیماندهٔ آن r باشد داریم :

$$v=\frac{r}{(T+۱)^{۲}-T^{۲}}=\frac{r}{۲T+۱}$$

بعداً خواهیم دید که **کاشانی** همین‌طریقه را درمورد استخراج ریشهٔ n اُم تعمیم می‌دهد و کسر :

$$\frac{r}{(T+۱)^{n}-T^{n}}$$

را به‌دست می‌آورد و مخرج آن را **مخرج اصطلاحی** می‌نامد[۱].

۱۳۱ـ کاشانی درپایان‌مثال‌فوق (ش ۱۲۸) می‌نویسند: « این روش وقتی که عدهٔ ارقام عدد زیاد باشد آسانتر است و ما آنرا استنباط کرده‌ایم وطریقهٔ اول را نیز منقح ساختیم[۲] .

---

۱ ← ش ۱۴۷ کتاب حاضر .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۲۹ : « وهواسهل اذا کان الارقام کثیرة وذلک مما استنبطناه و اما الطریق اولی فنحن نقحنا ها هکذا » .

تاریخچهٔ استخراج ریشه n اُم نزد ریاضیدانان ایرانی پیش از زمان کاشانی

۱۳۲ـ ریاضیدانان ایرانی پیش از **کاشانی** کتابهایی دربارهٔ استخراج جذر و کعب ریشه های بالاتر نوشته‌اند که اینک به‌ترتیب تقدم تاریخ مهمترین ازآنها را یاد می کنیم :

۱۳۳ـ ابوالوفای‌بوزجانی (قرن چهارم هجری) مؤلف کتابی است موسوم به «کتاب استخراج‌ضلع‌الکعب ومال‌المال ومایتر کب‌منهما[۱]» . این کتاب متأسفانه مفقود شده است . **و پکه** نوشته‌است که احیاناً موضوع آن کتاب بحث درحل معادلات:

$$x^4+ax^3=b \quad و \quad x^4=b \quad و \quad x^3=a$$

بوده است[۲] .

۱۳۴ـ کوشیاربن‌لبان‌گیلانی (جیلی) کـه درقرن چهارم هجری می‌زیسته ، فصلهای نهم تا شانزدهم کتاب « فی‌اصول‌حساب‌الهند[۳] » خود را به استخراج‌جذر و کعب اختصاص داده است .

۱۳۵ـ ابوریحان‌بیرونی (نیمهٔ اول قرن پنجم هجری) ، درضمن فهرست آثار خود که تاسال ۴۲۷ (۱۰۳۵) به‌تألیف آنها موفق‌شده بود ، از کتابی‌دربارهٔ‌استخراج

---

۱ ← نام این کتاب درمنابع مختلف به‌صورتهای متفاوت آمده است : ابن‌الندیم در الفهرست (چاپ فلوگل ، صفحهٔ ۲۸۳ ـ ترجمهٔ فارسی الفهرست ، صفحهٔ ۵۰۶) به جای « ضلع‌المکعب ومال‌المال » نوشته « ضلع‌المکعب بمال‌مال » . قفطی درتاریخ‌الحکماء» (چاپ لیپرت ص ۲۸۸ ـ ترجمهٔ فارسی تاریخ‌الحکماء ص ۳۹۲) به جای « ضلع » کلمهٔ « مبلغ » را گذاشته و نوشته « مبلغ‌المکعب بمال‌مال » . بدون‌تردید عنوان صحیح‌آن کتاب همان است که درمتن نوشته‌ایم (← **و پکه** C : ص ۲۰۴) .

۲ ← **و پکه** C : ص ۲۰۴

۳ ← متن عربی و ترجمهٔ انگلیسی این کتاب با مقدمه‌ای جامع به‌انگلیسی درسال ۱۹۶۵ م منتشر شده است (← **لوی‌وپتروک**) .

کعب وریشه های بالاتر نام برده که آن را درصد ورقه نوشته بوده است «کلاماً یتبعها فی استخراج الکعاب واضلاع ماوراثه من مراتب الحساب فی (۱۰۰) ورقة[۱]» . این کتاب نیز مفقود شده است .

۱۳۶- محمدبن‌ایوب طبری (نیمهٔ دوم قرن پنجم هجری) ، مؤلف کتاب « شمار نامه[۲] » ، بابهای سیزدهم تا هفدهم فصل اول آن کتاب را بـه استخراج جذر و کعب عددهای صحیح و امتحان آنها ، و بابهای هشتم و نهم از فصل دوم آن را به‌استخراج جذر و کعب کسرها ، و بابهای دهم تا هفدهم آن را به‌استخراج جذر و کعب از کسور شصتگانی (درج و دقائق) و امتحان صحت آنها اختصاص داده است .

۱۳۷- علی‌بن‌احمدنسوی (نیمهٔ دوم قرن پنجم هجری) درکتاب « المقنع فی الحساب الهندی » روشهای استخراج جذر و کعب **کوشیارگیلانی** (← ش ۱۳۴) را منقح ساخته و در بابهای دوازدهم تا پانزدهم مقالهٔ اول و بابهای ششم و هفتم ازمقالهٔ دوم و بابهای ششم وهفتم ازمقالهٔ سوم و بابهای ششم‌وهفتم از مقالهٔ چهارم آن کتاب دربـارهٔ استخراج جـذر و کعب عددهای صحیح و کسری و مرکب بحث کرده است[۳] .

۱۳۸- حکیم عمر خیام (نیمهٔ دوم قرن پنجم و اوایل قرن ششم هجری) نیز دربارهٔ استخراج ریشه های چهارم و پنجم و ششم و غیره کتابی داشته که متأسفانه

---

۱ ← **لغت نامه** ، حرف الف ، ص ۴۶۸ ستون دوم .

۲ ← متن فارسی این کتاب درسال ۱۳۴۵ ه . ش . درتهران به‌چاپ رسیده (← شمارنامه ـ متأسفانـه قسمتهای اساسی و مهم آن مغلوط چاپ شده) ولی هنوز چنانکـه باید مطالب ریاضی آن مورد نقادی قرار نگرفته است .

۳ ← این کتاب را **نسوی** قبلاً به‌زبان‌فارسی برای مجدالدولهٔ دیلمی نوشت وبعداً آن را برای یکی از جانشینان وی با تغییراتی به عربی برگرداند . یک نسخهٔ خطی ازاین کتاب درکتابخانهٔ لیدن به شمارهٔ ۱۰۲۱ موجود و عکس آن دراختیار نویسنده است .

ازبین رفته است ، چه وی در کتاب جبر خود می‌نویسد[1] : «هندیان‌را دراستخراج جذر و کعب طریقه‌ایست مبتنی براندك استقرائی ... و ما راکتابی است دربراهین درستی این راهها و منجر شدن‌آنها به مطلوب . و ما این‌طریقه ها را افزون کرده‌ایم یعنی استخراج مال‌مال و مال کعب و کعب کعب[2] و غیره را برآنها افزوده‌ایم و و این اضافات تازه است» .

کتابی که **خیام** به آن اشاره میکند ، ممکن است «رساله درصحت طرق هندی برای استخراج جذر و کعب» تألیف وی باشد که متأسفانه تاکنون نسخه‌ای از آن به دست نیامده ، و نیز ممکن است کتاب مذکور «کتاب مشکلات‌الحساب» وی باشد که آن هم مفقود شده‌است[3] .

۱۳۹ـ نصیرالدین طوسی (قرن هفتم هجری) درکتاب « جوامع‌الحساب

---

۱ ← مصاحب، حکیم‌خیام : متن‌عربی ص۱۲ وترجمهٔ فارسی ص۱۷۰ (ونیزرجوع کنید به **ویکه** A : صفحهٔ ۱۳ ترجمه) .

۲ - یعنی استخراج ریشه های چهارم و پنجم و ششم .

۳ - نام کتاب «مشکلات‌الحساب» در یک مجموعهٔ خطی شامل «رسالة فی شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس » متعلق به کتابخانهٔ لیدن آمده است . شمارهٔ مجموعهٔ خطی مذکور Or. 199(8) است و شرحی دربارهٔآن‌نسخه در صفحهٔ ۴۰ جلد سوم‌فهرست کتابخانهٔ لیدن نوشته شده . نویسند این مجموعه را شخصاً دیده‌ام . در پشت جلد آن به خط دیگری نوشته شده است: «فهرس ما فی‌هذا الدفتر من‌الکتب» و در جزو فهرست‌مذکور آمده است : «مشکلات الحساب‌له» اما متأسفانه «مشکلات الحساب» در جزو آن مجموعه نیست و مفقود شده است ـ چون نوشته‌اند که نسخه‌ای از این‌کتاب در مونیخ موجود است (مصاحب ، حکیم خیام : ص ۱۳۲)شخصاً به‌کتابخانهٔ شهر مونیخ مراجعه‌کردم و پس‌از جستجوی زیاد اثری از آن نیافتم .

بالتخت و التراب[1]» چندفصل دربارهٔاستخراج جذر و کعب وریشه های بالاتر دارد. کتاب مذکور مشتمل برسه باب است. باب اول آن در بارهٔ عددهای صحیح است و باب دوم آن مربوط به کسرهای متعارفی وباب سوم آن راجع به کسرهای شصتگانی است. فصل هشتم از باب اول آن در بارهٔ استخراج جذر و کعب و فصل نهم آن باب در بارهٔ استخراج ریشه های دیگر از اعداد صحیح است. همچنین فصلهای دوازدهم و سیزدهم باب دوم آن مربوط به استخراج جذر و کعب وریشه های دیگر از کسرهای متعارفی است؛ و بالاخره فصلهای هشتم و نهم باب سوم آن کتاب مربوط به استخراج جذر و کعب در دستگاه شصتگانی است.

طوسی قاعدهٔ استخراج ریشهٔ n اُم را به تفصیل در مورد مثال زیر شرح داده است[2]:

$$\sqrt[٦]{٢٤٤\ ١٤٠\ ٦٢٦}=٢٥\,\frac{١}{(٢٦)^٦-(٢٥)^٦}=٢٥\,\frac{١}{٦٤\ ٧٧٥\ ١٥١}$$

۱۴۰ـ نظام الدین اعرج (قرن هشتم هجری) نیزدر کتاب «الشمسیة فی الحساب[3]»

---

۱ ـ یک نسخهٔ خطی از «جوامع الحساب» درکتابخانهٔ استان قدس رضوی موجود است (← **فهرست رضوی**، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۱٦ ش ۴۳) و یک نسخهٔ خطی هم از آن متعلق به کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران (به شمارهٔ ۴۴۰۹/۲) است (← **فهرست دانشگاه**، ج ۱۳ ص ۳۳۷۰) نسخه های دیگری ازآن کتاب نیز در خارج از ایران موجود است (← **کراوزه** S، ص۴۹٦ و **بروکلمان** G_1، ص ٦۷۴ ش ۳۰ و **بروکلمان** S_1 ص ۹۳۰ ش ۳۰).

گذشته ازاینها «جوامع الحساب» درسال ۱۹٦۳ میلادی توسط S.A. Akhmedov به روسی ترجمه شده و در مجلهٔ «ایستوریکو ماتماتیچسکیه ایسلدوانیا» منتشر شده است.

۲ ← **یوشکویچ** G، ص ۲۴۷.

۳ ـ دو نسخهٔ خطی از «شمسیةالحساب» درکتابخانهٔ دانشگاه تهران به شماره‌های ۲٦۲۲/۱ و ۴۷۲۳/۳ موجود است و دو نسخهٔ خطی هم از آن در مشهد مضبوط است

بقیهٔ پاورقی در صفحهٔ بعد

یک باب در استخراج ریشهٔ n ُم دارد. کتاب مذکور مشتمل بر یک مقدمه و دوفن است (فن اول در دو باب و فن دوم در چهار باب). فصل سوم از باب اول از فن دوم کتاب شمسیه دربارهٔ استخراج ضلع n ُم است. **نظام اعرج** در این فصل قاعده‌ای کلی برای استخراج ریشهٔ n ُم ذکر می‌کند و به عنوان مثال کعب تقریبی عدد ۲۲۵ ۱۱۰ ۳٤ را مساوی با $\frac{۱}{۳۱۵ ۹۰۱}$ ۳۲؛ به دست می‌دهد، ولی برای استخراج ریشه های بالاتر مثالی نمی‌آورد.

استخراج ریشهٔ n ُم توسط کاشانی[۱]

۱٤۱- کاشانی برای استخراج ریشه n ُم عددهای صحیح در دستگاه شمار دهگانی و نیز در دستگاه شمار شصتگانی قاعده‌هایی کاملاً کلی بیان می‌کند[۲]. **یوشکویچ** نوشته است که: «تنها قاعدهٔ کلی که برای استخراج ریشهٔ n ُم اعداد صحیح در آثار ریاضیدانان اسلامی می‌شناسیم همان است که در مفتاح الحساب نوشته

بقیهٔ پاورقی از صفحه قبل

(فهرست رضوی: ج ۳ فصل ۱۷ ص ۳؛ شماره‌های ۱۳۱ و ۱۳۲) و چندین نسخهٔ خطی از آن نیز در خارج از ایران هست (← برکلمان $G_۲$: ص ۲۵٦ ش ۲ و برو کلمان $S_۲$: ص ۲۷۳ ش 2a) - **عبدالعلی بیرجندی** شرحی بر «شمسیة الحساب» نوشته است که یک نسخهٔ خطی از آن در مشهد (فهرست رضوی: ج ۳ فصل ۱۷ ص ۳؛ شمارهٔ ۱۳۳) موجود است و نیز **ابواسحاق عبدالله کوبنانی** شرحی برشمسیة الحساب نوشته است که یک نسخهٔ خطی از آن درکتابخانهٔ مرکزی دانشگاه به‌شمارهٔ ۲٤۱۷/۱ و یک نسخهٔ خطی دیگر از آن درکتابخانه مدرسهٔ سپهسالار به شمارهٔ ۵۲۱ مضبوط است.

۱ - برای کسب اطلاعات جامع در بارهٔ استخراج ریشهٔ n ُم نزد ریاضیدانان دورهٔ اسلامی رجوع کنید به: **لوکی** A - و نیز نگاه کنید به: **مصاحب**: جبر و مقابلهٔ خیام: صفحات ۱۵٦ و ۱۵۷.

۲ ← **مفتاح**، صفحات ۲۹ تا ۳۵ و ۷٤ تا ۷۷.

شده[۱]» ؛ اما ، چنانکه قبلاً گفتیم ، مثلاً در «الشمسیة فی‌الحساب» تألیف **نظام الدین** اعرج که از حیث زمان مقدم بر **کاشانی** است ، نیز قاعده‌ای کلی دراین باب آمده است (← ش ۱٤۰).

۱٤۲ـ عبدالقادر داخل درسال ۱۹۶۰ م فصل پنجم از مقالهٔ سوم « مفتاح الحساب» راکه دربارهٔ استخراج ریشهٔ n ُم در دستگاه شمار شصتگانی است به انگلیسی ترجمه کرد و آن را به تفصیل مورد بحث و تفسیر قرار داد ، و رسالهٔ وی در ۱۹۶۰ م توسط دانشگاه امریکائی بیروت چاپ شد ، وکسانی که بخواهند از روش استخراج ریشهٔ n ُم در دستگاه شصتگانی اطلاع به‌دست آورند می‌توانند به رسالهٔ مذکور رجوع کنند[۲].

۱٤۳ـ روشی که **کاشانی** برای‌استخراج ریشهٔ n ُم به‌کاربرده ، همان روشی است که اروپاییان بعدها درقرن‌نوزدهم میلادی یافتند وبه روش «روفینی ـ هورنو» (Ruffini—Horner) موسوم است[۳]. واین نکته را باید متذکر شدکه **کاشانی** فقط دستورکلی استخراج ریشهٔ n ُم را از خود می‌داند و می‌نویسدکه راهی‌که پیشینیان برای استخراج ریشهٔ n ُم داشته‌اند ، به ویژه هنگامی که عدهٔ ارقام عدد زیاد و n بزرگ باشد ، دشوار بوده است[٤].

۱٤٤ـکاشانی ظاهراً روش دیگری برای‌استخراج ریشهٔ n ُم از خود داشته و می‌خواسته آن را درکتاب جداگانه‌ای بنویسد و موفق نشده است ، چه در پایان

---

۱ ← **یوشکویچ** G ، ص ۲٤۲.

۲ ← **داخل** : رساله.

۳ ـ برای کسب اطلاع ازاین روش رجوع کنید به : **داخل** : رساله : ص ۹ تا ۱۱.

٤ ← **مفتاح** ،ص۳۵ : «و استخراج‌الضلع الاول بهذالدستوروعلی هذا الترتیب‌مما استنبطناه و اما ماذهب علیه‌المتقدمون فمتعسرخصوصاًاذاکثر عددالمنازل و مراتب العدد».

فصل پنجم از مقالهٔ اول «مفتاح الحساب» می‌نویسد[۱] : «و طریقهٔ دیگری استنباط کرده‌ایم که در رسالهٔ دیگر خواهیم نوشت».

۱۴۵ـ کاشانی پس از بیان قاعدهٔ کلی برای استخراج ریشهٔ n ُم به عنوان مثال از عدد :

٤٤ ٢٤٠ ٨٩٩ ٥٠٦ ١٩٧

ریشهٔ پنجم استخراج می‌کند. برای آنکه فهم روش استخراج ریشهٔ n ُم عملاً برای خواننده آسانتر باشد ، مثال استخراج ریشهٔ پنجم از عدد فوق را بااستفاده از «مفتاح الحساب[۲]» و با توضیحات کافی و اصطلاحات کنونی بیان می‌کنیم. این مثال جامع است و می‌توان آن را برای استخراج ریشه‌های دیگر سرمشق قرار داد.

۱۴۶ـ استخراج ریشهٔ پنجم از عدد :

٤٤ ٢٤٠ ٨٩٩ ٥٠٦ ١٩٧

الف ـ ارقام عدد مفروض را از سمت راست به دسته‌های پنج رقمی تفکیک می‌کنیم (زیرا می‌خواهیم ریشهٔ پنجم بگیریم) ، و آنها را با خطوط قائم مضاعف از یکدیگر جدا می‌نمائیم ، و نیز همهٔ ارقام عدد را با خطوط قائم ساده از یکدیگر مجزا می‌کنیم. چنانکه قبلاً درمورد جذر گفتیم (← ش ۱۲۶) **کاشانی** هریک از این دسته‌ها را **دور** و رقم اول سمت راست هردور را **مرتبهٔ منطق** آن دور می‌نامد.

عدد مفروض به سه دور تقسیم می‌شود که دور اول آن از سمت راست عدد ٠٦١٩٧ است و دور آخر آن فقط چهار رقم دارد (٤٤٢٤). ارقامی که ذیلاً با حروف سیاه چاپ کرده‌ایم مرتبه‌های منطق هردور را نشان می‌دهند :

دور اول	دور دوم	دور سوم
٠٦١٩**٧**	٠٨٩٩**٥**	٤٤٢**٤**

۱ ← **مفتاح** ، ص ۳۵ : «و قد استنبطنا طریقا آخر سنورده فی رسالة آخری».

۲ ← **مفتاح** ، صفحات ۲۹ تا ۳۵.

سپس پنج صف (خانهٔ) افقی مستطیل شکل در زیر عدد مفروض تشکیل می‌دهیم و از بالا به پایین به‌ترتیب آنها را **صف عدد** و **صف قوهٔ چهارم**[۱] و **صف قوهٔ سوم** و **صف قوهٔ دوم** و **صف پایه** می‌نامیم، و در بالای عدد مفروض نیز خانه‌ای برای نوشتن ریشه تشکیل می‌دهیم، و آن را **سطر خارج** می‌نامیم (رجوع کنید به جدول عملیات در صفحهٔ ۸۷).

ب ـ برای تعیین نخستین رقم سمت چپ ریشهٔ مطلوب، ریشهٔ پنجم نخستین دور سمت چپ (یعنی عدد ۴۴۲۴) را که یک رقمی است باامتحان کردن ارقام مختلف می‌یابیم، عدد ۵ حاصل می‌شود[۲]. این ۵ را در بالای مرتبهٔ منطق دور سوم یعنی در بالای رقم ۴ (سمت راست عدد ۴۴۲۴) می‌نویسیم و نیز آن را در پایین صف پایه به محاذات ۵ فوقانی ثبت می‌کنیم. سپس قوای متوالی عدد ۵ را در پایین صفهای هم نام خود می‌نویسیم، به این ترتیب که مربع آن یعنی ۲۵ را در پایین صف قوهٔ دوم و مکعب آن یعنی ۱۲۵ را در پایین صف قوهٔ سوم و قوهٔ چهارم ۵ یعنی ۶۲۵ رادر پایین صف قوهٔ چهارم و بالاخره قوهٔ پنجم ۵ یعنی ۳۱۲۵ را در صف عدد زیرعدد مفروض می‌نویسیم، به قسمی که یکان هریک از این اعداد درست به محاذات مرتبهٔ منطق دور مربوط قرار گیرد. سپس زیر عدد ۳۱۲۵ خطی افقی رسم می‌کنیم که دلیل برمحو کردن آن عدد باشد و ۳۱۲۵ را از دور اول کم می‌کنیم و باقیمانده یعنی ۱۲۹۹ را زیر خط افقی می‌نویسیم.

ج ـ برای تعیین دومین رقم ریشه به طریق زیر عمل می‌کنیم:

اولاً ـ (برای صف قوهٔ چهارم) ۵ هایی را که در صف پایه و در صف عدد نوشته بودیم باهم جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۱۰ را در صف پایه در بالای ۵

---

۱ ـ اگر مثلاً بخواهیم ریشهٔ هفتم بگیریم صف اول صف عدد و صف دوم صف قوهٔ ششم خواهد بود.

۲ ـ زیرا:

$$۵^۵=۳۱۲۵ < ۴۴۲۴ < ۵^٦=۱۵٦۲۵$$

می‌نویسیم[1]. سپس این مجموع یعنی ۱۰ را در عدد سطر خارج یعنی ۵ ضرب کرده حاصل یعنی ۵۰ را در صف قوهٔ دوم می‌نویسیم به طوری که رقم یکان‌آن در ستون مرتبهٔ منطق دوراخیرواقع شود و ۵۰ را با ۲۵ که در همان صف نوشته‌بودیم جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۷۵ را در بالای ۵۰ می‌نویسیم[2]. باز ۷۵ را در ۵ ضرب می‌کنیم و حاصل یعنی ۳۷۵ را در صف قوهٔ سوم به طریق مذکورمی‌نویسیم و آن را با عددی که درصف قوهٔ سوم نوشته بودیم یعنی ۱۲۵ جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۵۰۰ را در بالای ۳۷۵ می‌نویسیم. باز ۵۰۰ را در ۵ ضرب می‌کنیم و حاصل یعنی ۲۵۰۰ را درصف قوهٔ چهارم می‌نویسیم و آن را با عدد ٦۲۵ که قبلاً در آنجا نوشته بودیم جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۳۱۲۵ را در بالای آن می‌نویسیم.

ثانیاً ـ (برای صف قوهٔ سوم) ۵ را با ۱۰ که درصف پایه نوشته بودیم جمع می‌کنیم‌وحاصل یعنی ۱۵ را در بالای ۱۰ می‌نویسیم، باز ۱۵ را در ۵ ضرب می‌کنیم و حاصل یعنی ۷۵ را درصف قوهٔ دوم در بالای ۷۵ قبلی می‌نویسیم و آنها را باهم جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۱۵۰ را در بالای ۷۵ می‌نویسیم. باز ۱۵۰ را در ۵ ضرب می‌کنیم‌وحاصل یعنی ۷۵۰ را درصف‌قوهٔ سوم دربالای ۵۰۰ قبلی می‌نویسیم و آنها را باهم جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۱۲۵۰ را در بالای ۷۵۰ می‌نویسیم.

ثالثاً ـ (برای صف قوهٔ دوم) ۵ را با ۱۵ که در صف پایه نوشته بودیم جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۲۰ را در بالای ۱۵ می‌نویسیم. باز ۲۰ را در ۵ ضرب می‌کنیم و حاصل یعنی ۱۰۰ را در صف قوهٔ دوم بالای ۱۵۰ قبلی می‌نویسیم و

---

۱ ـ و در بالای ۵ یک خط افقی رسم می‌کنیم که دلیل برمحوکردن ۵ و اثبات ۱۰ باشد.

۲ ـ و در بالای ۵۰ یک خط افقی رسم می‌کنیم که دلیل برمحوکردن ۵۰ و اثبات ۷۵ باشد ـ به طورکلی هربارکه درصف‌ها عدد جدیدی به دست می‌آوریم عدد سابق را باکشیدن خطی افقی در بالای آن محو می‌کنیم.

حاصل یعنی ۲۰۰ را در بالای ۱۰۰ می‌نویسیم.

رابعاً ـ (برای صف پایه) ۵ را با ۲۰ که در صف پایه نوشته بودیم جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۲۰۵ را در بالای ۲۰ می‌نویسیم.

اکنون در صف پایه عدد **۲۵** ودر صف قوهٔ دوم عدد **۲۵۰** و در صف قوهٔسوم عدد **۱۲۵۰** و در صف قوهٔ چهارم عدد **۳۱۲۵** نوشته شده است.

د ـ اینک باید اعداد فوق‌را انتقال دهیم. عددی راکه درصف قوهٔ چهارم نوشته شده (یعنی ۳۱۲۰۵ را) یک رقم به طرف راست انتقال می‌دهیم ودر یک‌سطر بالاتر می‌نویسیم(و عدد سابق را با کشیدن‌خطی افقی در بالای آن محو می‌کنیم) وعددی را که در صف‌قوهٔ سوم نوشته شده (یعنی ۱۲۰۰۰ را)دو رقم به سمت راست انتقال می‌دهیم و در یک سطر بالاتر می‌نویسیم و عددی را که در صف قوهٔ دوم نوشته (یعنی ۲۰۰۰ را) سه رقم به سمت راست انتقال می‌دهیم و در یک سطر بالاتر می‌نویسیم و بالاخره عددی را که درصف پایه نوشته شده (یعنی ۲۰۵ را) چهار رقم به سمت راست انتقال می‌دهیم و در یک سطر بالاتر می‌نویسیم.

به این ترتیب عددی که در صف پایه پس‌از انتقال نوشته‌ایم (یعنی ۲۰۵) مرتبهٔ یکانش به محاذات مرتبهٔ دهگان دور دوم قرار می‌گیرد.

ه ـ اکنون باید درصدد جستجوی‌بزرگترین عدد یک رقمی مانند m برآییم به طوری که اگر آن را درصف پایه درسمت راست ۲۰۵ (که قبلاً آن را انتقال داده بودیم) بنویسیم تا:

$$\overline{۲۰m} = ۲۰ \times ۱۰ + m$$

حاصل شود و سپس این عدد را در m ضرب کرده با آنچه در صف قوهٔ دوم انتقال داده بودیم با درنظرگرفتن مراتب (یعنی با ۲۰۰۰) جمع و حاصل را در mضرب کنیم و با آنچه در صف قوهٔ سوم نوشته بودیم با درنظرگرفتن مراتب (یعنی با ۱۲۰۰۰۰) جمع کنیم و باز حاصل را در m ضرب کرده نتیجه را با آنچه درصف

قوهٔ چهارم نوشته بودیم (یعنی با . . . . . ۵ ۲ ۱ ۳) جمع کنیم ، بتوانیم حاصل اخیر را از آنچه در دو رسمت چپ در صف عدد نوشته شده است (یعنی از عدد ۱۲۹۹۰۸۹۹۵) کم کنیم. به تجربه این عدد m را مساوی با ۳ می‌یابیم و اعمال فوق‌الذکر را انجام می‌دهیم.

پس از انجام دادن این اعمال درصف پایه عدد **۲٦۵** و در صف قوهٔ دوم عدد **۲۸۰۹۰** و درصف قوهٔ سوم عدد **۱٤۸۸۷۷۰** و در صف قوهٔ چهارم عدد **۳۹٤۵۲٤۰۵** نوشته می‌شود.

باز باید به همان ترتیب که قبلاً گفتیم این اعداد را به سمت راست انتقال داد و رقم یکان ریشه را یافت.

ریشهٔ پنجم تقریبی عدد مفروض ۵۳٦ و با قیماندهٔ این ریشه عدد ۲۱ است و بنابراین عدد مفروض ریشهٔ پنجم درست ندارد و از حیث ریشهٔ پنجم اصم است.

			۵					۳					۶	سطر خارج
٤	٤	۲	٤	٥	۸	۹	۹	۵	۰	۶	۱	۹	۷	صف عدد بروجهی که مذکور شد [illegible]
۳	۱	۳	۵											
۱	۲	۹	۹											
۱	٥	۵	۶	۹	۵	٤	۹	۳						
	۲	٤	۳	۱	۳	۵	٥	۲						
	۲	٤	۲	۱	۳	۵	٥	۲	٥	۶	۱	۷	۶	
												۲	۱	
		٤	۱	۲	۶	۹	٤	۹	۵	۸	٥	۸	٥	صف قوهٔ چهارم
				۹	۱	۳	۶	۵	۹		۳	۸	٤	
		٤	۰	۳	۵	۵	۸	۳	۶	۷	۶	۹	۶	
				۹	٥	۳	٤	۳	۱	۷	۶	۹	۶	
		۳	۹	٤	۵	۲	٤	۰	۵					
	۳	۹	٤	۵	۲	٤	٥	۵						
		٤	۲	۲	۰	۵	۷	٤						
	۳	۵	۲	۳	۱	۸	۳	۱						
		۳	۹	۸	۱	۸	۳	۱						
	۳	۱	۲	۵										
۳	۱	۲	۵											
۲	۵	٥	۰											
	۶	۲	۵											
				۱	۵	۳	۹	۹	٥	۶	۵	۶	۰	صف قوهٔ سوم
						۱	۷	۱	٤	۱	٤	۹	۶	
				۱	۵	۲	۲	۷	۶	۵	٥	۶	٤	
						۱	۷	٥	٤	۵	٤	٤		
				۱	۵	٥	۵	۷	۱	۹	۶	۱	۶	
						۱	۶	۹	٤	۹	۶	۱	۶	
				۱	٤	۸	۸	۷	۷	۰				
		۱	٤	۸	۸	۷	۷	۰						
				۸	۱	۹	۱	۲						
		۱	٤	۰	۶	۸	۵	۸						
				۷	۹	۵	۸	۱						
		۱	۳	۲	۷	۲	۷	۷						
				۷	۷	۲	۷	۷						
		۱	۲	۵	۰									
۱	۲	۵	۰											
	۷	۵	۰											
	۵	٥	٥											
	۳	۷	۵											
	۱	۲	۵											
				۲	۸	٥	۹	٥						صف قوهٔ دوم
						۷	۸	۶						
				۲	۷	۳	٥	٤						
						۷	۷	۷						
				۲	۶	۵	۲	۷						
						۷	۶	۸						
				۲	۵	۷	۵	۹						
						۷	۵	۹						
				۲	۵	۰								
	۲	۵	٥				۲	۸	۷	۲	۹	۶	٥	
	۱	٥	٥						۱	۶	٥	٤	٤	
	۱	۵	٥				۲	۸	۵	۶	۹	۱	۶	
		۷	۵						۱	۶	٥	٥	۸	
		۷	۵				۲	۸	٤	٥	۹	۰	۸	
		$۲^{۵}$	$۵^{٥}$						۱	۵	۹	۷	۲	
							۲	۸	۲	٤	۹	۳	۶	
									۱	۵	۹	۳	۶	
							۲	۸	٥	۹	٥			
		۲	۵			۳	۶	۵		۳	۶	۸	٥	صف منحط
		۲	٥			۲	۶	۲		۲	۶	۷	٤	
		۱	۵					۹					۸	
		۱	۰					۶				۶	۲	
			۵			۲	۵	۳		۲	۶	۵	۶	

۱۴۷ـ کاشانی درمورد تعیین باقیماندهٔ ریشهٔ پنجم همان روشی را که دربارهٔ تعیین باقیماندهٔ جذربه‌کار برده بود تعمیم می‌دهد وبرای اصلاح ریشهٔ پنجم‌تقریبی عدد مفروض یعنی برای آنکه ریشهٔ ۵۳۶ دقیق‌تر باشد کسری به آن می‌افزاید. صورت این کسر عدد ۲۱ یعنی باقیماندهٔ ریشهٔ پنجم است و مخرج آن‌که آن را **مخرج اصطلاحی** می‌نامد عبارت است از:

$$(۵۳۷)^۵ - (۵۳۶)^۵$$

پس در واقع ریشهٔ پنجم‌تقریبی‌عدد مفروض (← ش ۱۴۶) را **کاشانی** مساوی با عدد کسری زیر محسوب می‌دارد[۱]:

$$۵۳۶ + \frac{۲۱}{(۵۳۷)^۵ - (۵۳۶)^۵} = ۵۳۶\frac{۲۱}{۴۱۴۲۳۷۷۴۰۲۸۱}$$

به‌طور کلی اگرریشهٔ nُم را T وباقیماندهٔ‌آن‌را r بنامیم کسری که‌برای‌اصلاح باید به ریشهٔ nُم‌افزود عبارت است‌از[۲]:

$$\frac{r}{(T+۱)^n - T^n}$$

برای محاسبهٔ مخرج اصطلاحی لازم نیست جداگانه $(۵۳۷)^۵ - (۵۳۶)^۵$ را حساب کنیم بلکه اعدادی را که پس‌از پایان عمل در فوق صفهای چهارگانه (جدول صفحهٔ ۸۷) به دست آمده است باهم جمع کرده و یک واحد به آنها

۱ ← **مفتاح**، ص ۳۵.

۲ ـ کاشانی‌دلیلی‌برای‌این موضوع نمی‌آورد اماچنانکه خواهیم دید (← ش۱۴۸) روش جداگانهٔ محاسبهٔ $(T+۱)^n - T^n$ را بیان می‌کند. کسانی که بخواهند دلیل صحت این روش را بدانند می‌توانند به یکی از منابع زیر رجوع کنند: **لوکی** A ـ **لوکی** R، ص ۲۴ ـ **یوشکویچ** G، ص ۲۴۴ ـ **رزنفلد و یوشکویچ**، ص ۳۳۲ یادداشت شمارهٔ ۲۱.

می‌افزاییم تا مخرج اصطلاحی حاصل شود :

٤	١	٢	٦	٩	٤	٩	٥	٨	٠	٨	٠	صف قوهٔ چهارم
		٩	٥	٢	٩	٩	٠	٦	٥	٦	٠	صف قوهٔ سوم
					٢	٨	٧	٢	٩	٦	٠	صف قوهٔ دوم
								٢	٦	٨	٠	صف پایه
٤	١	٤	٢	٣	٧	٧	٤	٠	٢	٨	١	مجموع اعداد فوق به اضافه یک

دستور محاسبهٔ $a^n - b^n$

۱٤٨ـ کاشانی درپایان باب پنجم از مقالهٔ اول[۱] می‌گوید که روش دیگری برای یافتن تفاضل بین یک قوه از دو عدد (یعنی $a^n - b^n$) هست که درآن احتیاج به شناختن اعدادی داریم که آنها را **اصول** این قوه می‌نامند[۲] :

«بدانکه[۳] اصل منزل قوهٔ دوم [یعنی ضریب ab در بسط $(a+b)^2$] فقط یک عدد است وآن ۲ می‌باشد و اصول منزل قوهٔ سوم [یعنی ضرایب عددی a^2b و

---

۱ ← **مفتاح** ، ص ۳۷ : «طریق آخر فی استخراج مابین المضلعین المنطقین ...»

۲ ـ محمد باقر یزدی نیز در پایان مطلب دهم از باب اول کتاب «عیون‌الحساب» فصلی دربارهٔ محاسبهٔ $a^n - b^n$ دارد و روشی برای محاسبهٔ ضرایب بسط دو جمله‌ای ذکر می‌کند ← **قربانی** ، دو ریاضیدان ایرانی ، صفحات ۳۸ تا ٤۱ .

۳ ← **مفتاح** ، ص ۳۷ : «و اعلم ان اصل منزلة المال عدد واحد و هواثنان و للکعب هماثلثة و لکل منزل بعده یزید عدده بواحد لازیاد الصفوف وهکذا یتزاید اعداد الاطراف و اذا جمعنا کل عددین متجاورین من اصول منزلة یحصل احد اعداد الاوساط من المنزلة المتأخره» .

ab^2 در بسط $(a+b)^3$] دو عدد است که عبارتند از ۳ و ۳ و برای هریک از منزلهای بعدی عدد آن یک واحد به ازای هرصف زیاد می‌شود و همچنین اعداد دو طرف یکی زیاد می‌شوند و اگر هردو عدد مجاور از اصول یک منزل را با هم جمع کنیم یکی از اعداد وسط از منزل بعدی به دست می‌آید . مثلاً اعداد منزل قوهٔ سوم ۳ و ۳ است که مجموعشان ٦ می‌شود پس ٦ عدد وسط منزل چهارم است و اصول منزل چهارم ٤ و ٦ و ٤ هستند و مجموع ٤ و ٦ یعنی ۱۰ یکی از دو عدد وسط منزل قوهٔ پنجم است و مجموع ٦ و ٤ عدد وسط دیگر است و به همین قیاس اصول

صفوف	اصول قوهٔ نهم	اصول قوهٔ هشتم	اصول قوهٔ هفتم	اصول قوهٔ ششم	اصول قوهٔ پنجم	اصول قوهٔ چهارم	اصول قوهٔ سوم	اصول قوهٔ دوم
صف قوهٔ هشتم	۹							
صف قوهٔ هفتم	۳۶	۸						
صف قوهٔ ششم	۸٤	۲۸	۷					
صف قوهٔ پنجم	۱۲۶	۵۶	۲۱	۶				
صف قوهٔ چهارم	۱۲۶	۷۰	۳۵	۱۵	۵			
صف قوهٔ سوم	۸٤	۵۶	۳۵	۲۰	۱۰	٤		
صف قوهٔ دوم	۳۶	۲۸	۲۱	۱۵	۱۰	۶	۳	
صف پایه	۹	۸	۷	۶	۵	٤	۳	۲

(جدول ۱)

منازل تا بی‌نهایت به قسمی که در جدول ، دیده می‌شود به دست می‌آیند[1] :

۱۴۹ـ کاشانی بعد می‌گوید[2] : «و هرگاه بخواهیم تفاضل بین یک قوه از دو عدد صحیح متوالی [یعنی $(a+1)^n-a^n$] را به دست آوریم[3] عدد کوچکتر (یعنی a) را در اصل صف پایهٔ آن قوه ضرب می‌کنیم و مربع آن (یعنی a^2) را در اصل صف قوهٔ دوم و مکعب آن (یعنی a^3) را در اصل صف قوهٔ سوم ضرب می‌کنیم و به همین طریق عمل را ادامه می‌دهیم تا اینکه جمیع قوای عدد a که از قوهٔ مفروض کوچکترند دراصول آن‌قوه ضرب شوند و همهٔ حاصل ها را با هم جمع می‌کنیم و یک واحد برآن می‌افزاییم تا تفاضل مطلوب حاصل شود[4] .

۱۵۰ـ مثال ـ می‌خواهیم 5^5-4^5 را حساب کنیم :

صفوفی برای قوایی که از قوهٔ پنجم کوچکترند تشکیل می‌دهیم و در آنها اصول متعلق به قوهٔ پنجم را در یک ستون می‌نویسیم و در ستون دیگرعدد کوچکتر یعنی ٤ را در صف پایه و مربع آن را در صف قوهٔ دوم و مکعب آن را در صف قوهٔ سوم و قوهٔ چهارم آن را در صف قوهٔ چهارم می‌نویسیم . سپس اعدادی را که درهر صف واقع شده درعدد نظیر خود ازستون قوه‌ها ضرب می‌کنیم وحاصل ها را درستون دیگری می‌نویسیم و بعد اعدادی را که در ستون حاصلضربها نوشته شده با هم‌جمع

---

۱ ـ ملاحظه کنید که این درست دستور تشکیل مثلث حسابی است که اروپائیان آن را مثلث حسابی پاسکال و ما آن را مثلث حسابی خیام می‌نامیم (← ش ۱۰۲ و ۱۰٤) .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۳۸ : «فاذا اردنا ان‌نستخرج مابین‌مضلعین‌منطقین‌متوالیین ...»

۳ ـ احتیاج به این محاسبهٔ وقتی پیدا می‌شود که بخواهیم **مخرج اصطلاحی** مذکور یعنی $(T+1)^n-T^n$ را حساب کنیم .

٤ ـ مثلاً" برای قوهٔ پنجم از دستور فوق حاصل می‌شود :

$$(a+1)^5-a^5=5a^4+10a^3+10a^2+5a+1$$

می‌کنیم و یک واحد به حاصل جمع می‌افزاییم عدد ۲۱۰۱ به دست می‌آید[1] و این مساوی است با $۵^۵ - ۴^۵$.

صفوف	اصول قوهٔ پنجم	قوای عدد ۴	حاصلضربها
صف قوهٔ چهارم	۵	۲۵۶	۱۲۸۰
صف قوهٔ سوم	۱۰	۶۴	۶۴۰
صف قوهٔ دوم	۱۰	۱۶	۱۶۰
صف پایه	۵	۴	۲۰

۲۱۰۰ ← حاصلجمع

۱

$۵^۵ - ۴^۵ = ۲۱۰۱$

(جدول ۲)

۱۵۱ـ سپس **کاشانی** می‌گوید[2]: «و هرگاه بخواهیم تفاضل یک قوه از دو عدد غیرمتوالی (یعنی $a^n - b^n$) مثلاً $۷^۵ - ۴^۵$ را به دست آوریم ستون دیگری به جدول فوق اضافه می‌کنیم و در آن قوای متوالی تفاضل دو عدد یعنی $۳ = ۴ - ۷$ را می‌نویسیم به قسمی که تفاضل (یعنی ۳) در صف قوهٔ چهارم و مربع آن در صف قوهٔ سوم و مکعب آن در صف قوهٔ دوم و قوهٔ چهارم آن در صف پایه قرار گیرد. سپس اعدادی را که در ستون حاصلضربها واقع شده‌اند در اعداد نظیر آنها از ستون قوای تفاضل ضرب می‌کنیم و حاصلضربهای اخیر را با هم جمع می‌کنیم و قوهٔ پنجم تفاضل یعنی $۲۴۳ = ۳^۵$ را به آن می‌افزاییم عدد ۱۰۷۸۳ حاصل می‌شود و این همان تفاضل

۱ ـ درواقع داریم:

$$۵^۵ - ۴^۵ = ۵ \times ۴^۴ + ۱۰ \times ۴^۳ + ۱۰ \times ۴^۲ + ۵ \times ۴ + ۱ = ۲۱۰۱$$

۲ ← **مفتاح**، ص ۳۹: «و ان اردنا مابین مضلعین منطقین غیرمتوالیین...»

قوای مطلوب است[۱].

صفوف	اصول قوهٔ پنجم	قوای عدد ٤	حاصلضربها	قوای عدد ٣	حاصلضربهای دوم
صف قوهٔ چهارم	٥	٢٥٦	١٢٨٠	٣	٣٨٤٠
صف قوهٔ سوم	١٠	٦٤	٦٤٠	٩	٥٧٦٠
صف قوهٔ دوم	١٠	١٦	١٦٠	٢٧	٤٣٢٠
صف پایه	٥	٤	٢٠	٨١	١٦٢٠

$$\begin{array}{rl} ١٥٥٤٠ & \rightarrow \text{حاصلجمع} \\ ٢٤٣ & \rightarrow ٣^{٥} \\ \hline ١٥٧٨٣ & = ٧^{٥}-٤^{٥} \end{array}$$

(جدول ۳)

ذکر یك نکتهٔ تاریخی

مثلث حسابی خیام و بسط دو جمله‌ای خیام

۱۵۲ـ با کمی دقت در جدولهای ۱و۲و۳ که گذشت معلوم می‌شود که :

اولا ـ جدول شمارهٔ ۱ همان مثلثی است که امروزه اروپائیان آن را « مثلث حسابی پاسکال» می‌نامند. یعنی مثلث حسابی زیر :

---

۱ - درواقع اگر به طورکلی عدد بزرگتر را $(a+b)$ وعدد کوچکتر را a بنامیم تفاضل آنها b می‌شودوداریم :

$$(a+b)^{٥}-a^{٥}=٥a^{٤}b+١٠a^{٣}b^{٢}+١٠a^{٢}b^{٣}+٥ab^{٤}+b^{٥}$$

سطر اول	۱									
سطر دوم	۱	۱								
سطر سوم	۱	۲	۱							
سطر چهارم	۱	۳	۳	۱						
سطر پنجم	۱	۴	۶	۴	۱					
سطر ششم	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱				
سطر هفتم	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱			
سطر هشتم	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱		
سطر نهم	۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱	
سطر دهم	۱	۹	۳۶	۸۴	۱۲۶	۱۲۶	۸۴	۳۶	۹	۱

جدول ۴- مثلث حسابی

بااین تفاوت که (الف) وضع قرارگرفتن اعداد درآنها متفاوت است یعنی اعدادی که درجدول ۱ درستونهای قائم قرارگرفته‌اند درجدول ۴ درسطرهای افقی واقع هستند و (ب) یکهائی که درجدول ۴ درستون چپ ودر قطر واقع هستند درجدول شمارهٔ ۱ دیده نمی‌شوند.

ثانیاًـ اعدادی که درجدول شمارهٔ ۱ قرار دارند[1] عبارتند از ضرایب بسط دو جمله‌ای. مثلاً اعدادی که درستون «اصول قوهٔ نهم» قرار دارند یعنی:

۹ و ۳۶ و ۸۴ و ۱۲۶ و ۱۲۶ و ۸۴ و ۳۶ و ۹

ضرایب بسط دوجمله‌ای $(a+b)^9$ هستند از این قرار:

۱ ـ اینها همان اعدادی هستند که درجدول ۴ یعنی مثلث حسابی درسطر دهم واقع هستند.

$$(a+b)^{9}=a^{9}+9a^{8}b+36a^{7}b^{2}+84a^{6}b^{3}+126a^{5}b^{4}+126a^{4}b^{5}$$
$$+84a^{3}b^{6}+36a^{2}b^{7}+9ab^{8}+b^{9}$$

و اگر مطابق با قرار دادهای کنونی عدهٔ ترکیبات[1] n شیء را r به r با علامت C_n^r نشان دهیم معلوم می‌شود که :

$$C_9^1=9 \text{ و } C_9^2=36 \text{ و } C_9^3=84 \text{ و } C_9^4=126 \text{ و } \ldots$$

ثالثاً - اگر در جدول شمارهٔ ۳ دو عدد صحیح غیر متوالی را a و b بنامیم حاصل این جدول با علائم کنونی دستور زیر است :

$$(a+b)^{5}-a^{5}=5a^{4}b+10a^{3}b^{2}+10a^{2}b^{3}+5ab^{4}+b^{5}$$

و از آنجا :

$$(a+b)^{5}=a^{5}+5a^{4}b+10a^{3}b^{2}+10a^{2}b^{3}+5ab^{4}+b^{5}$$

یعنی درست دستور بسط دو جمله‌ای که آن را دستور دو جمله‌ای **نیوتن** می‌نامند . البته این مثال برای قوهٔ پنجم داده شده ولی قاعدهٔ متن «مفتاح الحساب» کلی است و می‌توان آن را برای هرقوهٔ دیگری به کار برد به قسمی که قاعده‌ای که در «مفتاح الحساب» بیان شده در واقع شرح دستور بسط دو جمله‌ای مطابق با دستور زیر می‌باشد :

$$\boxed{(a+b)^{n}=a^{n}+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^{2}+\cdots+C_n^nb^{n}}$$

۱۵۳- این نکته شایستهٔ توجه است که **کاشانی** ، بنابر آنچه خود در مقدمهٔ «مفتاح الحساب» نوشته ، جدولهای ۱ و ۲ و ۳ را از پیشینیان خود اقتباس کرده است ، و چنانکه قبلاً هم گفتیم ، این محاسبات در کتابهای ریاضی که پیش از زمان **کاشانی** تألیف‌شده‌اند دیده می‌شود . بنابراین مثلث حسابی و دستوربسط دو-جمله‌ای

۱ - Combinaison فرانسوی - Cambination انکلیسی.

(برای قوای صحیح) مدتها قبل از زمان **کاشانی** شناخته شده بوده و بین ریاضیدانان معروف بوده تا آنجا که آنها را در کتابهای درسی می‌نوشته‌اند و آنها را برای استخراج ریشهٔ n اُم مورد استفاده قرار می‌داده‌اند.

۱۵۴ـ طبیعی است که از خود بپرسیم که این مطالب که در زمان کاشانی در زمرهٔ مطالب معمولی ریاضیات بوده از کجا آمده وچه کسی آنها را کشف کرده است؟ چنانکه قبلاً گفتیم (← ش ۱۳۸) **حکیم عمر خیام** در کتاب جبر و مقابلهٔ خود به صراحت ادعا می‌کند که استخراج ریشه های چهارم و پنجم و ششم و غیره را به طرق هندی افزوده است و کسی قبل از وی به آنها دست نیافته بوده ونظر به اینکه مطالب مذکور بعد از **حکیم عمر خیام** در کتابهای ریاضی اسلامی در باب استخراج ریشهٔ n اُم دیده می‌شود و رفته رفته تا زمان **کاشانی** در جزو مطالب درسی و جاری ریاضیات در آمده است، می‌توان دانست که مخترع واقعی **مثلث حسابی و دستور بسط دو جمله‌ای** (البته در حالت خاصی که نمایندهٔ دو جمله‌ای عدد صحیح باشد) همان **حکیم عمر خیام** است که در قرن یازدهم میلادی یعنی در حدود شش قرن قبل از **پاسکال** و **نیوتن** می‌زیسته[۱] و حق آن است که اینها را به نام **خیام** بنامیم و بگوییم «مثلث حسابی خیام» و «دستور دو جمله‌ای خیام[۲]».

نگاهی به باب ششم از مقالهٔ اول مفتاح الحساب

۱۵۵ـ باب ششم مفتاح الحساب مربوط به امتحان صحت اعمال به وسیلهٔ عدد **۹** است. **کاشانی** مانند سایر ریاضیدانان پیش از خود مجموع ارقام هرعدد را می‌گیرد و آن را ۹ به ۹ طرح می‌کند و بقیه را **میزان** آن عدد می‌نامد. یعنی در واقع میزان هرعدد عبارت است از باقیماندهٔ تقسیم آن عدد بر ۹. مثلاً **کاشانی** میزان عدد

---

۱ ـ سال وفات خیام ۱۱۳۱ میلادی و سال وفات پاسکال ۱۶۶۲ و سال وفات نیوتن ۱۷۲۷ میلادی است.

۲ ـ و رجوع کنید به: **قربانی**، مثلث حسابی.

٦٤٥٧٨ را مساوی با عدد ۳ به دست می‌آورد. سپس طریقهٔ امتحان صحت اعمال ضرب و تقسیم و استخراج جذر و کعب و سایر ریشه‌ها را مطابق با روش کنونی شرح می‌دهد.

۱۵٦ـ موضوع جالب توجه دراین باب این است که کاشانی در ابتدای آن می‌نویسد[۱]: «اگر حساب درست باشد میزان درست درمی‌آید وعکس این مطلب صحیح نیست».

این موضوع از این جهت جالب است که برخی از ریاضیدانان اسلامی قبل‌از **کاشانی** به عدم صحت عکس مطلب فوق اشاره نکرده‌اند. مثلاً **کرجی** درکتاب «الکافی فی‌الحساب» و **نسوی** درکتاب «المقنع فی‌الحساب الهندی[۲]» می‌گویند که هرگاه نتیجهٔ امتحان صحیح باشد محاسبه نیز صحیح است وهرگاه نباشد محاسبه نیز صحیح نیست و **خوارزمی** نیز درکتاب حساب خود همین را گفته است[۳].

اما ریاضیدان دیگری از مردم مصر یاسوریه موسوم به **تقی‌الدین بن عزالدین حنبلی** که‌ظاهراً درقرن هشتم هجری می‌زیسته درکتاب«حاوی‌اللباب من‌علم‌الحساب» توجه خواننده را به این موضوع جلب می‌کند که اگر نتیجهٔ امتحان غلط درآید معلوم می‌شود حساب غلط است‌اما‌اگر صحیح درآید معلوم‌نیست که حساب‌صحیح باشد. یعنی صحیح بودن نتیجهٔ امتحان شرط لازم برای صحت عمل هست ولی کافی نیست[٤].

۱ ← **مفتاح**، ص ۳۹: «فی‌الموازین، للحساب امتحان یعرف بالمیزان ان صح الحساب صح المیزان ولم یطرد».

۲ ـ نسوی در باب نهم از مقالهٔ‌اول «المقنع» می‌نویسد: «فی‌میزان الضرب و هوان نأخذ میزان‌المضروب والمضروب فیه کل واحد منهما علی‌حده و نضرب بعضهم فی‌بعض و نحفظ الباقی بعد اسقاط تسعة‌تسعة ان جاوزها؛ ثم نأخذ میزان‌الحاصل من‌الضرب فان کان مساویا للمحفوظ فالضرب صواب و ان خالفه فخطا».

۳ ← **لوکی** R: ص ۲٦.

٤ ← **کارادوو** A.

نگاهی به مقالهٔ دوم مفتاح‌الحساب

۱۵۷ـ مقالهٔ دوم مفتاح‌الحساب مربوط به حساب کسرها است و مشتمل بردوازده باب است.

درآغاز باب اول این مقاله **کاشانی** کسر را چنین تعریف می‌کند: «کسر کمیتی است که نسبت داده شود به عددصحیحی که به عنوان واحد فرض شده‌است و مخرج نامیده می‌شود[۱]».

در واقع **کاشانی** کلمهٔ کسر را دراینجا هم به‌جای صورت کسر و هم به جای خود کسر به کار برده است و در بعضی جاهای دیگر صورت کسر را **عدد الکسر**[۲] می‌نامد.

۱۵۸ـ سپس **کاشانی** کسرها را به وجه زیر تقسیم بندی می‌کند (در مثالهای زیر a و b و c و d و ... اعداد صحیح مثبت فرض می‌شوند):

الف ـ کسر مفرد[۳] : $\frac{a}{b}$ $\quad b > ۱$

کسر مفرد بردو نوع است:

۱ـ **مجرد**[۴] : $a = ۱$ مثل $\frac{۱}{۲}$ (نصف) و $\frac{۱}{۳}$ (ثلث) و $\frac{۱}{۱۱}$ و $\frac{۱}{۲۰}$.

۲ـ **مکرر**[۵] : $a > ۱$ مثل $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۵}{۱۱}$.

---

۱ ← **مفتاح**، ص ۴۰: «فی تعریف الکسور و اقسامه و هی کمیة تنسب الی جملة تفرض واحد و المنسوبة الیهما یسمی مخرجا».

۲ ـ مثلاً در تعریف کسر مجرد وکسر مکررکه در یادداشتهای شمارهٔ ۴ و ۵ ذیلاً نقل شده است.

۳ ← **مفتاح**، ص ۴۰: «فالمفرد ما نسب فیه عددصحیح الی‌عدد صحیح اکثرمن‌الواحد تفرض واحدا صحیحا فقط».

۴ ـ فالمجرد هومایکون **عددکسره** واحدا کواحد من اثنین.

۵ ← **مفتاح**، ص ۴۱: «و المکرر ما هو **عددالکسر** فیه ازید من‌الواحد».

۱۵۹ـ کاشانی دراینجا خاطرنشان می‌کند که نسبت بین کسر (صورت) و مخرج آن در اعداد نامتناهی یافت می‌شود، (منظورش این‌است که مثلاً کسرهای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{٤}$ و $\frac{۳}{٦}$ و . . . و $\frac{a}{۲a}$ با هم معادل هستند) و می‌گوید بهتر است که کوچکترین اعداد صحیح ممکن را صورت و مخرج کسر اختیار کنیم و استعمال کسر را به شکلهای دیگر **قبیح** قلمداد می‌کند[۱].

مثلاً از بین کسرهای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{٤}$ و $\frac{۳}{٦}$ و . . . فقط $\frac{۱}{۲}$ را به کار می‌برد و $\frac{۲}{٤}$ و غیره را زشت می‌داند.

۱٦۰ ـ ب ـ کسر مرکب و آن یا **معطوف** است و یا **مستثنی** و یا **مضاف** و یا **منکسر** و یا ترکیبی از این چهار نوع یا بعضی ازانواع آن:

۱ـ کسر معطوف[۲] آن است که از عطف دو یا چند کسر حاصل شود.

مثال ۱ :

$$\frac{۱}{۲} \text{ و } \frac{۱}{۳} \qquad \text{یعنی} \quad \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲}$$

مثال ۲ :

$$\frac{۳}{٥} \text{ و } \frac{۱}{٤} \text{ و } \frac{۱}{۷} \quad \text{یعنی} \quad \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{٤} + \frac{۳}{٥}$$

۲ـ کسر مستثنی[۳] آن‌است که کسری یا کسرهایی از کسر دیگری کم شود.

---

۱ ← **مفتاح**، ص ٤۱ : «و اعلم ان کل نسبة بین‌الکسر و مخرجه یوجد فی‌اعداد غیر متناهیة و المختار منها فی‌الاستعمال اقل عددین صحیحین علی تلک‌النسبة و ایراد ما سواهما قبیح.

۲ ← **مفتاح**، ص ٤۱ : « فالمعطوف ما یعطف کسر علی کسراخر و ذلک اما بین اثنین اواکثر».

۳ ← **مفتاح**، ص ٤۱ : « و الکسرالمستثنی مااستثنی عن کسر کسراخر و هوایضا اما بین‌اثنین اواکثر.

مثال ۱ :

$$\frac{۱}{۵} - \frac{۲}{۳}$$

مثال ۲ :

$$\frac{۱}{۲۰} - \frac{۲}{۱۱} - \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۲}$$

۳ـ کسر مضاف[۱] به قول **کاشانی** آن است که مخرج جزء اول را واحد یا بیشتر انگاشته آن را به مخرج دیگری نسبت دهیم (یعنی کسری از کسر دیگر که آن را به منزلهٔ واحد می‌گیریم) :

مثال ۱ : نصف یک ششم یعنی $\frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۲}$

مثال ۲ : ربع سه پنجم یعنی $\frac{۳}{۵} \times \frac{۱}{٤}$

و ممکن است اضافه چند بار تکرار شود.

مثال ۳ : نصف سه پنجم از چهار نهم از یک دهم یعنی :

$$\frac{۱}{۱۰} \times \frac{٤}{۹} \times \frac{۳}{۵} \times \frac{۱}{۲}$$

کاشانی پس از ذکر مثال اخیر اضافه می‌کند که بهتراست در کسر مضاف و معطوف کسرهای بزرگتر مقدم باشند[۲].

٤ـ کسر منکسر[۳] آن است که یکی از دو منسوب (صورت و مخرج) یا هر دوی آنها صحیح نباشند.

---

۱ ← **مفتاح**، ص ٤۱ : «و الکسر المضاف ما یفرض مخرج جزء الاول کم کان واحدا او اکثر و ینسب الی مخرج آخر».

۲ ← **مفتاح**، ص ٤۱ : «و الاولی فی المضاف والمعطوف تقدیم الاکثرفالاکثر».

۳ ← **مفتاح**، ص ٤۱ : «و الکسرالمنکسر هوما یکون احدالمنسوبین او کلاهما غیر صحیح».

مثال :

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} \quad و \quad \frac{\frac{1}{9}}{4\frac{1}{2}} \quad و \quad \frac{1}{3\frac{1}{2}} \quad و \quad \frac{1\frac{1}{2}}{5}$$

۵ـ کسرهایی که از چهار نوع فوق ترکیب شده باشند.

مثال :

$$\frac{\frac{1}{3}}{2\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

۱۶۱ـ کاشانی در پایان این باب عبارتی‌دارد که از نظرتاریخ ریاضیات بسیار مهم است و دلیل برآن است که وی مخترع کسرهای اعشاری است و ما بعداً در بخش ششم کتاب‌حاضردربارهٔآن به‌تفصیل بحث‌خواهیم کرد و آن عبارت این‌است[1]: «و منجمان کسرهای معطوفی به کار می‌برند که مخرجهای متوالی‌آنها شصت‌وقوای متوالی شصت است تا هرجا بخواهند و آنها را به ترتیب دقیقه‌ها و ثانیه‌ها و ثالثه و رابعه‌ها و غیره می‌نامند و ما به قیاس حساب منجمان کسرهایی آورده‌ایم که مخرجهای متوالی آنها ده و قوای متوالی ده می‌باشد تا هرجا بخواهیم و آنها را به ترتیب«اعشار» و «دومین‌اعشار» و «سومین اعشار»و«چهارمین اعشار» نامیدیم».

۱۶۲ـ در باب دوم مقالهٔ دوم **کاشانی** چگونگی‌نوشتن کسرها را شرح می‌دهد و برای علامت جمع حرف **و** و برای علامت تفریق حرف **الا** و برای علامت ضرب

---

۱ ← **مفتاح**، ص ۴۲ : «و المنجمون استعملوا کسو را معطوفة علی ان مخارجها المتوالیه هی‌ستون ومضلعاته‌المتوالیه الی‌حیث شاؤا و ترکوا ما بعدها یسمونها علی‌التوالی بالدقایق و الثوانی و الثوالث و الروابع و قس علیه و سخن اوردنا علی قیاس‌المنجمین کسورایکون مخارجهاالمتوالیه عشرة ومضلعاتها المتوالیة الی‌حیث شئنا و نسمیها بالاعشار و ثانی الاعشار وثالث الاعشار و رابعها و هلم‌جرا».

حرف **ل** و برای علامت تقسیم حرف **من** را به‌کار می‌برد[۱] و در اینجا ما روش وی را با روش متداول کنونی روبروی هم قرار می‌دهیم تا مقایسهٔ آنها آسان باشد :

روش کاشانی		روش کنونی
کسر با عدد صحیح :	۳ ۱ ۲	$3\frac{1}{2}$
کسر بدون عدد صحیح :	۰ ۱ ۲	$\frac{1}{2}$
جمع (کسر معطوف) :	۰ ۰ ۱ و ۱ ۲ ۳	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
تفریق (کسر مستثنی) :	۰ ۰ ۱ الا ۱ ۳ ۴	$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$
ضرب (کسر مضاف) :	۰ ۱ ۴ ل ۱ ۶ ل ۳ ۵	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}$

۱ ← **مفتاح**، ص ۴۱ تا ۴۳.

تقسیم (کسر منکسر) :	۲ ۱ ۲ من ۴ ۲ ۵	$\frac{2\frac{1}{2}}{4\frac{2}{5}}$
ترکیب چند عمل :	٠ ٠ ۱ ۱ ۳ ۲ من و ل الا ۱ ۲ ۱ ۱۰ ۱ ٦ ۲	$\frac{\frac{1}{3}}{2\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$

۱٦۳ـ باب سوم مقالهٔ دوم[۱] دربارهٔ تداخل و اشتراك و توافق و تماثل اعداد صحیح است و دراینجا **کاشانی** «شمارندهٔ مشترك[۲]» دوعدد متوافق (متشارك)

۱ ← **مفتاح**، ص ٤٥.

۲ ـ به عقیدهٔ من بهتر است به جای اصطلاح «مقسوم علیه» به معنی «عد کننده»

بقیهٔ پاورقی در صفحهٔ بعد

را «مشترك فيه» یا «وفق» می‌نامد و خارج قسمت تقسیم هریک از دو عدد متوافق را بروفق آنها « جزء الوفق» یا « اشتراك » آن عدد می‌نامد. مثلاً دو عدد ۱۰ و ۱۵ متشارك هستند و وفق آنها ۵ است،و جزء الوفق ۱۰ عدد ۲ و جزء الوفق عدد ۱۵ عدد ۳ است.

برای تعیین بزرگترین شمارندهٔ مشترك دوعدد،**کاشانی** همان الگوریتم مشهور **اقلیدس**[1] را شرح می‌دهد.

۱٦٤ـ باب چهارم مقالهٔ دوم در بارهٔ تجنیس و رفع است و باب‌پنجم‌آن‌مربوط به یافتن کوچکترین مخرج مشترك بین چند کسر است و **کاشانی** دو قاعده در این مورد ذکر می‌کند[2] که اگرچه‌باهم اندك تفاوتی دارند ولی در واقع هردومعادل همان قاعده‌ای است که اکنون به‌کار می‌بریم.

۱٦۵ـ باب ششم مقالهٔ دوم مفتاح‌الحساب در بارهٔ «افراد کسر مرکب»یعنی به دست آوردن حاصل کسرهای معطوف ومستثنی و مضاف‌و منکسر است که‌تعریف آنها را قبلاً ذکرکردیم(← ش ۱٦۰). در آخر این باب**کاشانی** می‌گوید[3] که اگرکسری مرکب از چند کسر مرکب بود ابتدا هریك ازکسرهای مرکب را به‌کسر مفرد تبدیل می‌کنیم و سپس حاصل را مفرد می‌سازیم. به عنوان نمونه

بقیهٔ پاورقی از صفحهٔ قبل :

اصطلاح **شمارنده** به‌کار رود. مثلاً شمارنده‌های عدد ٦ عبارتند از ۱ و ۲ و ۳ و ٦. به خصوص که «مقسوم علیه» در مقام تقسیم به‌کار می‌رود و ممکن است « شمارندهٔ » مقسوم نباشد. مثلاً در تقسیم ۱۷ بر ۵ عدد ۵ «مقسوم‌علیه» است ولی «شمارندهٔ» عدد۱۷ نیست. اصطلاح «شمردن» به معنی «عدکردن» را ابوریحان بیرونی در التفهیم به‌کار برده است ← **التفهیم**، ص ۳٦ : «و این عددکه ایشان را **بشمرد** او را وفق خوانند میان ایشان».

۱ – یعنی‌تعیین بزرگترین شمارندهٔ مشترك دو عدد به وسیلهٔ تقسیمات متوالی.

۲ ← **مفتاح**، ص ٤٦ تا ٤٨.

۳ ← **مفتاح**، ص ۵۰.

مثالی را که **کاشانی** در آخر این باب آورده است با معادل آن به وسیلهٔ اصطلاحات کنونی در اینجا می‌آوریم :

٢		
١		
٤		١
من		٢
٥		٣
٤	الا	من
٥		٨
ل		
٢		
١		
٢		
من		
٤		

مطلوب :

٠
٩٥
٢٧٨٤

یعنی :

$$\frac{٢\frac{١}{٤}}{٥\frac{٤}{٥}} \times \frac{٢\frac{١}{٢}}{٤} - \frac{١\frac{٢}{٣}}{٨} = \frac{٩٥}{٢٧٨٤}$$

۱۶۶ـ باب هفتم مقالهٔ دوم در بارهٔ تنصیف وتضعیف و جمع و تفریق کسرها و باب هشتم آن در بارهٔ ضرب کسرها است و با عملیات کنونی چندان تفاوتی ندارد . **کاشانی** در آخر این باب به کسرهای اعشاری که خود اختراع کرده است اشاره می کند

و روش ضرب کردن کسرهای اعشاری را به وسیلهٔ شبکهٔ ضرب شرح می‌دهد[۱] و مابعداً این مطلب را در بخش‌ششم این کتاب مورد بررسی‌قرارخواهیم‌داد. باب‌نهم مقالهٔ دوم در تقسیم کسرها است.

۱۶۷ـ باب دهم مقالهٔ دوم مربوط به استخراج ریشهٔ n ُم ازکسرها است. دراین باب به دستورهای زیر برمی‌خوریم[۲] :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{b^{n-1}\cdot a}}{b}$$

کاشانی می‌گوید[۳] : «هرگاه صورت‌ومخرج (نسبت به ریشهٔ مطلوب) منطق‌نباشند صورت کسر را درمورد جذر یک بار در مخرج ضرب می‌کنیم و درمورد کعب دوبار و درمورد ریشهٔ چهارم سه بار و در مورد ریشهٔ پنجم چهار بار ضرب می‌کنیم و به همین نحو برای سایر ریشه‌ها عمل می‌کنیم و ریشهٔ حاصل اخیر را به تقریب می‌گیریم و این ریشه را برمخرج تقسیم می‌کنیم».

مثال ۱ :

$$\sqrt{\frac{٥}{٦}}=\frac{\sqrt{٥\times٦}}{٦}=\frac{٥\frac{٥}{١١}}{٦}=\frac{٦٠}{٦٦}=\frac{١٠}{١١}$$

مثال ۲ :

$$\sqrt[٤]{\frac{١}{٤}}=\frac{\sqrt[٤]{١\times٤^{٣}}}{٤}=\frac{\sqrt[٤]{٦٤}}{٤}\approx\frac{٢\frac{٤٨}{٦٥}}{٤}=\frac{٨٩}{١٣٠}$$

---

۱ ← **مفتاح**، ص ٥٤.

۲ ← **مفتاح**، ص ٥٥.

۳ ← **مفتاح**، ص ٥٥ : «وان‌لم‌یکن کل واحد منهما منطقاًنضرب‌الکسرفی‌المخرج سرةللجذر و مرتین‌للکعب وثلث مرات لضلع مال المال و اربع مرات لمال الکعب و هکذافی سایر المنازل بتزاید واحد واحد و نأخذ ضلع‌الحاصل الاخیر بالتقریب علی سامر و نقسم هذا الضلع علی‌المخرج أعنی مخرج الکسر الذی نرید ضلعه فما خرج فهوالمطلوب».

سپس مطابق با دستوری که قبلاً در مقالهٔ اول برای استخراج جذر تقریبی بیان کرده[۱] یعنی دستور :

$$\sqrt{a^۲+r} \approx a + \frac{r}{۲a+۱}$$

ریشهٔ زیر را به دست می‌آورد[۲] :

$$\sqrt{۷\frac{۱}{۶}} = \sqrt{۴+۳\frac{۱}{۶}} \approx ۲ + \frac{۳\frac{۱}{۶}}{۵} = ۲ + \frac{۱۹}{۳۰}$$

و می گوید که اگر عدد کسری را تجنیس کنیم جذر دقیق‌تر به دست می‌آید :

$$\sqrt{۷\frac{۱}{۶}} = \sqrt{\frac{۴۳}{۶}} = \frac{\sqrt{۲۵۸}}{۶} = \frac{۱۶\frac{۲}{۳}}{۶} = ۲\frac{۶۷}{۹۹}$$

و باز مطابق با دستور کلی ($\rightarrow$ ش ۱۴۷) :

$$\sqrt[n]{T^n+r} = T + \frac{r}{(T+۱)^n - T^n}$$

کعب زیر را حساب می کند :

$$\sqrt[۳]{۳۰\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۳]{۲۷+۳\frac{۱}{۲}} \approx ۳\,\frac{۳\frac{۱}{۲}}{۴^۳-۳^۳} = ۳\,\frac{۳\frac{۱}{۲}}{۳۷} = ۳\,\frac{۷}{۷۴}$$

و می گوید که در اینجا نیز اگر عدد کسری را تجنیس کنیم کعب دقیقتر به دست می‌آید :

---

۱ $\rightarrow$ ش ۱۳۰ کتاب حاضر.

۲ $\rightarrow$ **مفتاح**، ص ۵۶.

$$\sqrt[3]{30\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{\frac{61}{2}}\approx\frac{\sqrt[3]{61\times 2^2}}{2}=\frac{\sqrt[3]{244}}{2}=\frac{6\frac{28}{127}}{2}$$

$$=3\frac{14}{127}$$

۱۶۸ـ باب یازدهم مقالهٔ دوم مفتاح در بارهٔ تبدیل مخرج کسر به عدد دلخواهی است. برای این کار **کاشانی** ابتدا تناسب را شرح می‌دهد و بعد به عنوان مثال می‌گوید می‌خواهیم مخرج کسر $\frac{5}{7}$ را به ۹ تبدیل کنیم و تناسب $\frac{x}{9}=\frac{5}{7}$ را حل می‌کند و جواب $x=6\frac{3}{7}$ را به دست می‌آورد و کسر $\frac{5}{7}$ را به شکل $\frac{6\frac{3}{7}}{9}$ می‌نویسد[1].

۱۶۹ـ سپس کسرهای **دانگ**(دانق) و **تسو** (طسوج) و **شعیر** را که در زمان وی بین در باب معاملات متداول بوده است شرح می‌دهد:

$\frac{1}{6}$ دینار = دانگ

$\frac{1}{24}$ دینار = $\frac{1}{4}$ دانگ = تسو

$\frac{1}{96}$ دینار = $\frac{1}{16}$ دانگ = $\frac{1}{4}$ تسو = شعیر

باب دوازدهم مقالهٔ دوم در بارهٔ ضرب و تقسیم دانگها و تسوها و شعیرها است.

نگاهی به مقالهٔ سوم مفتاح الحساب

۱۷۰ـ مقالهٔ سوم مفتاح الحساب در بارهٔ حساب منجمان یعنی حساب دردستگاه

---

۱ ← **مفتاح**، ص ۵۹.

شمار شصتگانی[۱] (ستینی) است و باب اول این مقاله در بارهٔ چگونگی نوشتن اعداد دراین دستگاه است. و چون در بخشهای آیندهٔ این کتاب گاهی ناچار خواهیم بود که بعض اعداد را دراین دستگاه شمار بنویسیم لازم می‌دانیم به عنوان مقدمه برای آن دسته از خوانندگان این کتاب که باحساب منجمان آشنائی ندارند بااستفاده از باب اول مقالهٔ سوم «مفتاح الحساب» وکتابهای دیگر توضیحی در بارهٔ این دستگاه بدهیم و قراری برای نوشتن این اعداد با ارقام هندی بگذاریم.

۱۷۱ـ تا آنجا که اطلاع داریم نخستین کس که در دورهٔ اسلامی در بارهٔ حساب در دستگاه شصتگانی کتابی نوشت **کوشیار بن لبان گیلانی** (جیلی) از ریاضیدانان قرن چهارم هجری بود. وی مقالهٔ دوم کتاب «فی اصول حساب الهند» خود را به حساب دراین دستگاه اختصاص داد.

۱۷۲ـ حساب جمل ـ در حساب جمل[۲] اعداد را به وسیلهٔ حروف: **ابجد**، **هوز**، **حطی**، **کلمن**، **سعفص**، **قرشت**، **ثخذ**، **ضظغ** که بیست و هشت حرف هستند نشان می‌دهند. به این ترتیب که مطابق با جدول زیر نه حرف از **الف** تا **طا** را برای یکان و از **یا** تا **صاد** را برای دهگان و از **قاف** تا **ظا** را برای صدگان و **غین** را به جای هزار می‌گیرند:

---

۱ ← اصطلاح فارسی **شصتگانی** (Sexagésimal =) معادل با «ستینی» عربی را ابوریحان بیرونی درکتاب التفهیم (صفحات ٤٤ و ٤٥) در ترکیباتی از قبیل «کسور شستگانی» و «مرتبه های شستگانی» به کار برده است و پسوند «گان» در اینجا دال بر تکریر عدد است یعنی شصت شصت. مااین اصطلاح را به صورت «شصتگانی» معادل با «ستینی» به کار می‌بریم و شصت را عمداً با صاد می‌نویسیم (همانگونه که صدگان را معمولاً باصاد می‌نویسند) تا با **شستگانی** که به معنی بنیاد و اساس است (← **برهان قاطع**) مشتبه نشود.

۲ ـ و رجوع کنید به مقالهٔ «ابجد» در «دایرة المعارف فارسی» و مقالهٔ «حساب الجمل» در «دایرة المعارف اسلام» چاپ دوم.

يكان	ا ۱	ب ۲	ج ۳	د ٤	هـ ۵	و ۶	ز ۷	ح ۸	ط ۹	
دهگان	ی ۱۰	ک ۲۰	ل ۳۰	م ٤۰	ن ۵۰	س ۶۰	ع ۷۰	ف ۸۰	ص ۹۰	
صدگان	ق ۱۰۰	ر ۲۰۰	ش ۳۰۰	ت ٤۰۰	ث ۵۰۰	خ ۶۰۰	ذ ۷۰۰	ض ۸۰۰	ظ ۹۰۰	غ ۱۰۰۰

و اعداد دیگر را به وسیلهٔ ترکیب این حروف می‌نویسند و در موقع نوشتن اعداد مرکب عدد بزرگتر را برعدد کوچکتر به ترتیبی که در فارسی تلفظ می‌کنیم مقدم می‌دارند. دراینجا چند عدد را هم به حساب جمل و هم باارقام هندی می‌نویسیم تا مطلب واضح شود:

یا	کد	نط	قا	غقلد
۱۱	۲٤	۵۹	۱۰۱	۱۱۳٤

و عدهٔ هزارگان را مطابق با تلفظ فارسی برحرف «غین» مقدم می‌دارند.

مثال:

بغ	هغ	بغتکج
۲۰۰۰	۵۰۰۰	۲٤۲۳

برای نوشتن این حروف در زیجها قواعدی هست. از قبیل اینکه نقطهٔ **با** و **جیم** و **زا** و **یا** رانمی‌گذارند و **جیم** را به شکل **ح** می‌نویسند تا با **حا** اشتباه نشود و غیره

۱۷۳ـ اگرچه در دستگاه شمار شصتگانی از همین حروف جمل برای نوشتن

اعداد استفاده می‌شود ، ولی باید متوجه بود که نوشتن اعداد در حساب جمل ودر دستگاه شمار شصتگانی تفاوت دارد .

۱۷۴ـ ارقام شمار شصتگانی ـ همانگونه که در شمار دهگانی همهٔ اعداد را به وسیلهٔ صفرونه رقم ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ می‌نویسیم در شمار شصتگانی برای نوشتن همهٔ اعداد به صفر و پنجاه و نه رقم (از یک تا پنجاه و نه) احتیاج هست که آنها را همانگونه که گفتیم با ترکیب حروف جمل می‌نویسند به این شرح :

ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط	ی
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
یا	یب	یج	ید	یه	یو	یز	یح	یط	ک
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
کا	کب	کج	کد	که	کو	کز	کح	کط	ل
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
لا	لب	لج	لد	له	لو	لز	لح	لط	م
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
ما	مب	مج	مد	مه	مو	مز	مح	مط	ن
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
نا	نب	نج	ند	نه	نو	نز	نح	نط	
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	

پس در شمار شصتگانی ارقام از یک تا پنجاه‌ونه به صورت مرکب نوشته می‌شود مانند **ید** (یعنی ۱۴) و **کز** (یعنی ۲۷) و **نط** (یعنی ۵۹) و غیره .

در زیج ها صفر را به صورتهای مختلف نوشته‌اند . مثلاً دایره‌ای کوچک

که خط کوچکی بربالای آن مماس شده باشد. و از جمله دراین اواخر آن را به‌شکل دو ضمهٔ معکوس روی یکدیگر شبیه به ها و به صورت ها می‌نوشتند.

۱۷۵- چگونگی نوشتن اعداد در دستگاه شصتگانی - می‌دانیم که پایهٔ دستگاه شمار دهگانی عدد ۱۰ است یعنی واحد هرمرتبه (از راست به چپ) ده‌برابر واحد مرتبهٔ قبل ازآن و یکدهم واحد مرتبهٔ بعداز آن است ومثلاً عدد ۱۴۳۷۹/۵۶ را در واقع می‌توان چنین نوشت:

$$۱\times(۱۰)^{۴}+۴\times(۱۰)^{۳}+۳\times(۱۰)^{۲}+۷\times(۱۰)^{۱}+۹+\frac{۵}{۱۰}+\frac{۶}{(۱۰)^{۲}}$$

اما پایهٔ دستگاه شمار شصتگانی عدد ۶۰ است یعنی واحد هرمرتبه ۶۰ برابر واحد مرتبهٔ مادون آن و $\frac{۱}{۶۰}$ واحد مرتبهٔ مافوق آن می‌باشد.

قدما مرتبهٔ **آحاد** شمار شصتگانی را مرتبهٔ **درجات** می‌نامیدند و در جهت نزول هردرجه را به ۶۰ دقیقه و هردقیقه را به ۶۰ ثانیه و هرثانیه را به ۶۰ ثالثه و هرثالثه را به ۶۰ رابعه و هکذا تقسیم می‌کردند، به قسمی که بعداز مرتبهٔ درجات در جهت نزول مرتبهٔ دقیقه‌ها و بعداز آن مرتبهٔ ثانیه‌ها و بعداز آن به‌ترتیب مرتبه‌های ثالثه‌ها و رابعه‌ها و خامسه‌ها و سادسه‌ها و غیره قرار داشت که آنها را کسرهای شصتگانی (کسور ستینی) می‌نامیدند و این مراتب را برعکس مراتب شمار دهگانی از راست به‌چپ می‌نوشتند و یااسامی مرتبه‌ها را یا در بالای ارقام‌قرار می‌دادند و یانام‌آخرین مرتبهٔ‌را در سمت چپ آن می‌نوشتند، مگر وقتی که قرنیه‌ای برای دانستن نام مراتب در دست باشد.

مثلاً ۲ درجه و ۲۴ دقیقه و ۱۱ ثانیه و ۴۵ ثالثه را به یکی‌از شکلهای زیر می‌نوشتند:

ثالثه	ثانیه	دقیقه	درجه
مه	یا	کد	ب

(از راست به چپ بخوانید)

و یا :

ب　　کد　　یا　　مه　(ثالثه)

و این عدد را با ارقام هندی می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$\frac{۴۵}{(۶۰)^۳} + \frac{۱۱}{(۶۰)^۲} + \frac{۲۴}{۶۰} + ۲$$

(از راست بچپ)

و یا

$$۲ + \frac{۲۴}{۶۰} + \frac{۱۱}{(۶۰)^۲} + \frac{۴۵}{(۶۰)^۳}$$

(از چپ به راست)

همچنین در جهت صعود هر ۶۰ درجه را یک واحد از مرتبهٔ بالاتر محسوب می‌داشتند و آن را واحد مرتبهٔ «**یک بار مرفوع**» یا به طور خلاصه «**مرفوع**» می‌نامیدند و هر ۶۰ واحد«یکبار مرفوع» را یک واحد از مرتبهٔ بالاتر قرار می‌دادند وآن‌را واحد مرتبهٔ«**دو بار مرفوع**» یا «**مثانی**» ومرتبهٔ بعد از آن را «**سه بارمرفوع**» یا «**مثالث**» و مرتبهٔ بعدی را «**چهار بار مرفوع**» یا «**مرابع**» و غیره می‌نامیدند.

بنابراین وقتی در کتابهای ریاضی قدیمی عددی را به شکل زیر می‌بینیم :

مرفوع مرتين	مرفوع	درجه	دقائق	ثواني	ثوالث
يد	ب	نو	مب	كا	لح

از راست بچپ بخوانید

و یا به شکل :

يد   ب   نو   مب   كا   لح   (ثالثه)

مقصود عدد زیر می‌باشد :

$$۱٤\times(٦٠)^{۲}+۲\times(٦٠)+٥٦+\frac{٤۲}{(٦٠)}+\frac{۲۱}{(٦٠)^{۲}}+\frac{۳۸}{(٦٠)^{۳}}$$

(از چپ به راست بخوانید)

۱۷٦ـ تبصره ـ گفتیم که نوشتن اعداد با حساب جمل با نوشتن آنها در دستگاه شصتگانی تفاوت دارد (← ش ۱۷۳) ، مثلاً عدد ۱٦۳ در حساب جمل به صورت **قسج** نوشته می‌شود درصورتی که همین عدد دردستگاه شصتگانی به‌شکل زیر نشان داده می‌شود :

مرفوع	درجه
ب	مج

یعنی :

$$۲\times ٦٠+٤۳$$

۱۷۷ـ عدد مفرد و عدد مجرد ـ کاشانی هرعدد را که در دستگاه شصتگانی فقط در یک مرتبه واقع باشد یعنی به صورت $a(٦٠)^{k}$ نوشته شود (a یکی از اعداد

۱ تا ۹ ه و k عددی است صحیح و مثبت یا منفی) **عدد مفرد** می‌نامد[1]. مثلاً ۵ ٤ درجه عددی است مفرد و همچنین ۳ ۲ رابعه عدد مفرد است.

عدد مجرد عبارت است از هریک از قوای صحیح مثبت یا منفی شصت. مثلاً یک ثانیه عدد مجرد است و همچنین یک درجه عدد مجرد می‌باشد[1].

۱۷۸ـ قرار داد مهم ـ چون در کتاب حاضر ناچاریم که اعداد دستگاه شصتگانی را طوری بنویسیم که خواننده به آسانی بتواند ارزش آنها را دریابد:

ارقام شصتگانی را با ارقام هندی (معمولی) و مراتب را برخلاف قدما از چپ به راست می‌نویسیم و بین هردو مرتبهٔ متوالی یک «,» (ویرگول) قرار می‌دهیم و قسمت صحیح عدد را از قسمت اعشاری آن با علامت «;» (نقطه ویرگول) جدا می‌سازیم.

مثلاً عدد مذکور در شمارهٔ ۱۷۵ یعنی:

ید ب نو مب کا لح (ثالثه)

و یا:

$$۱٤\times(٦۰)^{۲}+۲\times(٦۰)+٥٦+\frac{٤۲}{(٦۰)}+\frac{۲۱}{(٦۰)^{۲}}+\frac{۳۸}{(٦۰)^{۳}}$$

را چنین می‌نویسیم:

۱٤,۲,٥٦ ; ٤۲,۲۱,۳۸

همچنین وقتی می‌نویسیم:

۱۷,۰,٤۱ ; ۲۲,۳۹

یعنی:

---

۱ ـ **مفتاح**، ص ٦٤: «و یسمی **مفرداً** ما کان فی مرتبة واحدة ای ما کان قسماً واحداً من الارقام الستین فی‌ای سلسلة کان و **مجرداً** ما کان عقده واحدا و **مرکباً** ما کان فی‌مرتبتین اوازید.

$$۱۷ \times (۶۰)^۲ + ۰ + ۴۱ + \frac{۲۲}{۶۰} + \frac{۳۹}{(۶۰)^۲}$$

* * *

۱۷۹- پس از این توضیح و قرار داد خاطرنشان می‌کنیم که یونانیان اعداد را در دستگاه شمارشصتگانی خالص نمی‌نوشتند بلکه دستگاه عدد نویسی آنان ترکیبی بود از دستگاههای شصتگانی و دهگانی. **بطلمیوس** در «مجسطی» طول سال را، برحسب روز، به صورت زیر نوشته است[۱]:

۳۶۵   ۱۴   ۴۸

یعنی:

$$۳۶۵ + \frac{۱۴}{(۶۰)} + \frac{۴۸}{(۶۰)^۲}$$

یعنی در واقع قسمت صحیح عدد را در دستگاه دهگانی و قسمت کسری آن را در دستگاه شصتگانی نوشته است. چنین دستگاه عدد نویسی را **لوکی** دستگاه ذوحیاتین (amphibisch) نامیده است[۲].

۱۸۰- دربرخی از کتابهای ریاضی اسلامی که از زمانهای پیش از عصر **کاشانی** به دست ما رسیده است نیز غالباً محاسبات، مخصوصاً در مورد ضرب و تقسیم، در دستگاه شصتگانی خالص دیده نمی‌شود، اما **کاشانی** در «مفتاح الحساب» وسایر آثار خود همهٔ اعمال و حتی استخراج ریشهٔ n اُم را یا در دستگاه دهگانی خالص و یا در دستگاه شصتگانی خالص انجام داده است. برای آنکه تفاوت بین این دوروش محاسبه روشن شود یک مثال از عمل ضرب از کتاب «المقنع فی الحساب الهندی»

۱ ← **لوکی** R: ص ۴۱.

۲ ← **لوکی** R: ص ۴۲.

نسوی و یک مثال از کتاب «استخراج الاوتار» بیرونی و یک مثال از کتاب «مفتاح الحساب» کاشانی را در اینجا می‌آوریم :

۱۸۱ـ نسوی در باب چهارم از مقالهٔ چهارم کتاب « المقنع[۱] » برای ضرب کردن دو عدد :

درجه	دقیقهٔ	ثانیه		درجه	دقیقه	ثانیه
(٤ ,	١٥ ,	٤)	و	(٦ ,	٢٠ ,	١٣)

ابتدا هرعدد را برحسب جنس کوچکترین مرتبهٔ آن در دستگاه دهگانی می‌نویسد :

ثانیه	درجه	دقیقه	ثانیه
١٥٣٢٠ =	٤ ,	١٥ ,	٢٠

ثانیه	درجه	دقیقه	ثانیه
٢٢٨١٣ =	٦ ,	٢٠ ,	١٣

و سپس این اعداد را که دردستگاه دهگانی نوشته شده است در هم ضرب می‌کنند :

$$١٥٣٢٠ \times ٢٢٨١٣ = ٣٤٩\ ٤٩٥\ ١٦٠$$

و بعد حاصل را در دستگاه شصتگانی می‌نویسد (یعنی حاصل را بر ٦٠ تقسیم می‌کند و باز خارج قسمت را بر ٦٠ تقسیم می‌کند و عمل را آنقدر ادامه می‌دهد تا خارج قسمت از ٦٠ کوچکتر شود. باقیمانده‌های این تقسیمات به ترتیب از جنس رابعه[۲] و ثالثه و ثانیه و دقیقه و درجه خواهد بود) :

---

۱ ← نسخهٔ خطی «المقنع فی الحساب الهندی» شمارهٔ ٥٥٦/٦ لیدن روی برگ ٧٨.

۲ - زیرا حاصلضرب ثانیه‌ها از جنس رابعه‌ها می‌باشد :

$$\frac{١}{(٦٠)^٢} \times \frac{١}{(٦٠)^٢} = \frac{١}{(٦٠)^٤}$$

درجه	دقیقه	ثانیه	ثالثه	رابعه
۲۶ ،	۵۸ ،	۱	۵۹	۲۰ = ۱۶۰ ۴۹۵ ۳۴۹ رابعه

چنانکه دیده می‌شود **نسوی** عمل ضرب را در دستگاه شصتگانی انجام نمی‌دهد.

۱۸۲ـ همچنین **بیرونی** در غالب آثار خود اعمال ضرب و تقسیم و استخراج جذر اعداد شصتگانی را در دستگاه دهگانی انجام می‌دهد، یعنی بدواً اعداد شصتگانی را در دستگاه دهگانی می‌نویسد واعمال را در دستگاه اخیر انجام می‌دهد و سپس نتیجه را به دستگاه شصتگانی می‌برد.

مثلاً در فصل اول از مقالهٔ دوم کتاب «استخراج الاوتار[1]» وقتی می‌خواهد عدد (**ند** ج ثانیه) را به قوهٔ ۲ برساند ابتدا این عدد را در دستگاه دهگانی می‌نویسد:

ثانیه	دقیقه	ثانیه	دقیقه	ثانیه
ج	**ند** =	۳	۵۴ =	۳۲۴۳

سپس حاصل را مجذور می‌کند:

$$(۳۲۴۳)^۲ = ۱۰\ ۵۱۷\ ۰۴۹$$

در مقالهٔدوم آن کتاب[2] نیزهمهٔ محاسبات در دستگاه دهگانی انجام شده است[3].

۱۸۳ـ اما **کاشانی** در مقالهٔ سوم «مفتاح‌الحساب» که مربوط به‌حساب‌منجمان است همهٔ اعمال تضعیف و تنصیف و جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و استخراج‌جذر

۱ ـ جزورسائل بیرونی چاپ حیدرآباد، صفحهٔ ۱۱۷.

۲ ـ از صفحهٔ ۱۱۷ تا صفحهٔ ۱۳۳ چاپ فوق.

۳ ـ برای مثالهای دیگر رجوع کنید به کتاب «تحدید نهایات الاماکن» بیرونی، نسخهٔ خطی شمارهٔ ۳۳۸۶ ایاصوفیا صفحهٔ ۶۱ تا ۶۷ (عکس این نسخهٔ خطی نفیس را دوست گرامی آقای دکتر منوچهر ستوده به نویسنده اهدا کرده‌است).

و حتی استخراج ریشهٔ n ُم را کاملاً در دستگاه شصتگانی خالص انجام می‌دهد[۱] و برای هریک از این اعمال قبلاً قاعدهٔ عمل را به وجه کلی بیان می‌کند و بعداً مثال می‌آورد ، و نیز در « رسالهٔ محیطیه[۲] » همهٔ اعمال را در دستگاه شصتگانی خالص انجام می‌دهد.

اکنون یک مثال از عمل ضرب را از کتاب «مفتاح‌الحساب» به عنوان نمونه در اینجا می‌آوریم[۳] :

در این مثال کاشانی دو عدد[٤] :

(۳۸ , ٤۰ , ۱۵ ; ۲٤) و (۲۰ ; ۵۱ , ۹ , ۱۳)

را به وسیلهٔ شبکهٔ ضرب مطابق با نمونه‌ای که در بخش اول کتاب حاضر در مورد عددهای‌صحیح گفتیم(← ش ۱۱۱) در هم ضرب کرده است(← اول‌صفحهٔ ۱۲).

حاصل این ضرب با قرار دادی که در شمارهٔ ۱۷۸ بیان کردیم به صورت زیر نوشته می‌شود :

٤۰ , ۵۰ , ۲۷ , ٤٤ ; ۵٤ , ۲۲ , ۱۹ , ۵

در این شبکه حاصلضرب هردو عدد مفرد (← ش ۱۷۷) که در خارج جدول به محاذات دو ضلع فوقانی‌آن‌نوشته شده است در مربعی که‌از تلاقی مستطیلهای‌روبروی آن دو عدد تشکیل شده نوشته شده است. مثلاً حاصلضرب (۱۵ دقیقه) در (۵۱ درجه) می‌شود. (۷۶۵ دقیقه) یعنی (۱۲ درجه و ٤۵ دقیقه) و دو عدد اخیر در مربع وسط جدول نوشته شده و به وسیلهٔ قطر مربع از یکدیگر جدا شده است.

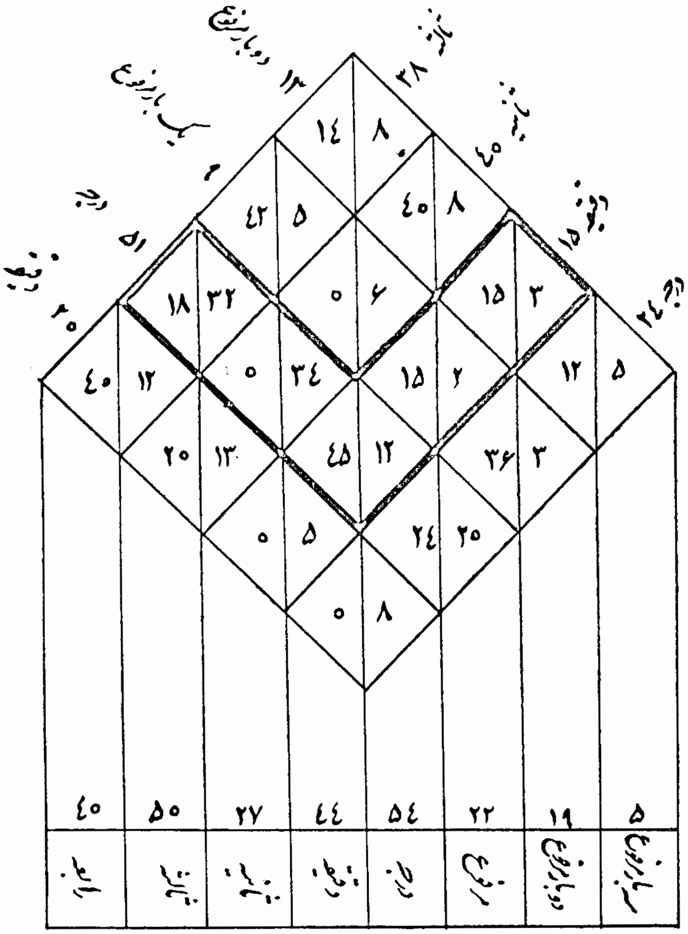
---

۱ ← **مفتاح** ، ص ۶۳ تا ۷۸.

۲ ← بخش چهارم کتاب حاضر.

۳ ← **مفتاح** ، ص ۶۹ و ۷۰.

٤ – برای آگاهی یافتن ازروش مادرنوشتن‌اعداد شصتگانی‌رجوع کنید به‌شمارهٔ ۱۷۸ کتاب حاضر.



بنابر آنچه گذشت می‌توان گفت که قواعد اعمال حساب دردستگاه شصتگانی در عهد **کاشانی** و در کتاب « مفتاح الحساب » به درجهٔ کمال خود رسیده بوده است[1].

۱۸۴ـ این نکتهٔ جالب توجه را نیز ناگفته نگذریم که **کاشانی** در باب سوم مقالهٔ سوم «مفتاح الحساب» که مربوط به ضرب اعداد شصتگانی است ، آنجا که از

---

۱ ـ برای کسب اطلاع ازتاریخچهٔ محاسبه‌در دستگاه شصتگانی به وسیلهٔ ریاضیدانان اسلامی رجوع کنید به **لوکی** R صفحات ٦٤ تا ۹۰.

جدول ضرب اعداد شصتگانی گفتگو می‌کند، در بارهٔ جنس مراتب می‌گوید[۱]:
هرگاه برای درجه (عدد) **صفر** و برای «یکبار مرفوع» و دقیقه عدد **یک** و برای «دو بار مرفوع» و ثانیه عدد **دو** و برای «سه بار مرفوع» و ثالثه عدد **سه** و به همین قیاس برای مراتب دیگر عدد بگیریم اینها فاصله‌های مراتب از درجه هستند و **اعداد مراتب** نامیده می‌شوند.

مقصود کاشانی از اصطلاح **اعداد مراتب** نماینده‌های قوای ۶۰ است وقتی که عدد شصتگانی به صورت زیر نوشته شود:

$$a_n \times (٦٠)^n + \cdots + \underset{\text{دو بار مرفوع}}{\underset{\uparrow}{a_٢}} \times (٦٠)^٢ + \underset{\text{یک بار مرفوع}}{\underset{\uparrow}{a_١}} \times (٦٠)^١ + \underset{\text{درجه}}{\underset{\uparrow}{a_٠}} \times (٦٠)^٠$$

$$+ \underset{\text{دقیقه}}{\underset{\uparrow}{a_{-١}}} \times (٦٠)^{-١} + \underset{\text{ثانیه}}{\underset{\uparrow}{a_{-٢}}} \times (٦٠)^{-٢} + \cdots + a_{-m} \times (٦٠)^m$$

کاشانی برای نمایندهٔ ۶۰ درعدد a_0 (درجه) صفر را اختیار کرده یعنی درواقع $(٦٠)^٠$ را مساوی با یک گرفته و برای صفر مفهوم قوهٔ یک عدد را قائل شده است و تا آنجا که اطلاع داریم در بین ریاضیدانان دورهٔ اسلامی **کاشانی** نخستین کس است که این کار را کرده است.

اگرچه برای «یک بار مرفوع» و «دقیقه» هردو عدد یک را به عنوان نمایندهٔ پایهٔ شصت اختیار کرده است، ولی مطابق با دستوری که بعداً می‌دهد کاملاً واضح است که نماینده‌های قوای شصت را باید در موقع محاسبه منفی محسوب داشت.

۱ ← **مفتاح**، ص ۶۷: «و اذا اخذنا للدرج صفراً وللمرفوع المرة و الدقیقه‌واحدا و للمثانی و الثانیة اثنین و للمثالث و الثالثة ثلثة و علی‌هذا القیاس فهی ابعادالمراتب عن الدرج سمیت اعداد المراتب».

چه می‌نویسد[۱] : «برای ضرب کردن یک عدد مفرد (← ش ۱۷۷) در عدد مفرد دیگر، اگر این دو عدد مفرد در یک طرف درجه واقع باشند اعداد مراتب آنها را باهم جمع می‌کنیم و اگر در دو طرف درجه واقع باشند تفاضل اعداد مراتب آنها را می‌گیریم و حاصل از مرتبه‌ای خواهد بود که عددش (یعنی قدر مطلق نمایندهٔ ۶۰ در آن مرتبه) بیشتر است» یعنی :

$$(۶۰)^{i}\times(۶۰)^{j}=(۶۰)^{i+j}$$

در این دستور، با اصطلاحات و علائم کنونی، i و j اعداد صحیح مثبت یا منفی هستند.

* * *

۱۸۵ـ استخراج ریشهٔ n اُم از اعداد شصتگانی ـ باب پنجم مقالهٔ سوم «مفتاح الحساب» دربارهٔ استخراج ریشهٔ n اُم با حساب منجمان است[۲]، و **کاشانی** در آن، قاعدهٔ کلی استخراج ریشهٔ n اُم دردستگاه شمار شصتگانی را به تفصیل شرح می‌دهد و به عنوان مثال ریشه های زیر را استخراج می‌کند[۳] وکمال مهارت و زبردستی خود را در فن محاسبه به ثبوت می‌رساند[۴] :

$$\sqrt{۱۰\,,\,۹\,,\,۴۹\,,\,۲۰}=۲۴\,,\,۴۱\;;\;۴۰$$

---

۱ ← **مفتاح**، ص ۶۷ :«ثم اذا ضربنا مفردا فی مفرد نجمع عددی مرتبتی المضروبین ان کانا فی احد طرفی الدرج فالمجموع عدد مرتبة الحاصل فی ذلک الطرف و نأخذ الفضل بینهما ان اختلفا فهو عدد مرتبة فی الطرف الذی له الفضل».

۲ ـ برای کسب اطلاع از تاریخچهٔ استخراج ریشهٔ n اُم توسط دانشمندان اسلامی رجوع کنید به **لوکی** A .

۳ ← **مفتاح**، ص ۷۴ تا ۷۸.

۴ ـ قرار داد برای چگونگی نوشتن اعداد شصتگانی در کتاب حاضر در شمارهٔ ۱۷۸ نوشته شده است.

$$\sqrt{18,52;59,43,51,25}=10;25,30$$

$$\sqrt[6]{34,59,1,7,14,54,23,3,47,37;40}=14,0;30$$

کاشانی در آخر این باب می‌نویسد[۱] : «مادر رسالهٔ خود موسوم به محیطیه جذرهای اعداد کثیرالارقام را حساب کرده و در آن نکات ظریفی به کار برده‌ایم».

۱۸۶ـ در سال ۱۹۵۱ میلادی **عبدالقادر داخل** رساله‌ای در بارهٔ باب پنجم از مقالهٔ سوم «مفتاح الحساب» نوشت و رسالهٔ او در سال ۱۹۶۰ توسط دانشگاه امریکائی بیروت چاپ شد[۲].

داخل در فصل اول رسالهٔ خود حساب جمل را که توسط **کاشانی** به کار رفته شرح می‌دهد ودرفصل دوم آن روش موسوم به **روفینی ـ هورنر** (Ruffini Horner) را که مربوط به محاسبهٔ ریشه های حقیقی کثیرالجمله های عددی است با علائم و اصطلاحات کنونی بیان می کند. در فصل سوم آن رساله عکس صفحاتی ازنسخهٔ خطی «مفتاح‌الحساب» که متعلق به دانشگاه پرینسیتن است با ترجمهٔ تحت‌اللفظی مطالب آن به انگلیسی آمده‌است. **داخل** در فصلهای چهارم و پنجم تفسیر مفصل و جامعی از اصطلاحات خاص و متن باب پنجم مقالهٔ سوم مفتاح‌الحساب آورده‌است و خدمت بسیار ارزنده‌ای به تاریخ ریاضیات نموده است.

* * *

۱۸۷ـ موضوع باب ششم مقالهٔ سوم «مفتاح‌الحساب» تحویل اعداداز دستگاه شمار شصتگانی به دستگاه دهگانی و معرفی کسرهای‌اعشاری است که **کاشانی** خود

---

۱ ← **مفتاح**، ص ۷۷ : « و قد استخرجنافی‌رسالتناالمسماة بالمحیطیة جذورکثیرة الارقام و استعملنا فیها نکات غریبة».

۲ ← **داخل**، رساله.

مخترع آنها است ، و چون این موضوع از لحاظ تاریخ ریاضیات اهمیت دارد مابحث در آن را موضوع بخش ششم کتاب حاضر قرار می‌دهیم.

نگاهی به مقالهٔ چهارم مفتاح‌الحساب

۱۸۸ـ موضوع مقالهٔ چهارم «مفتاح‌الحساب» اندازه‌گیری ابعاد و سطح و حجم شکلهای هندسی است. دراین مقاله **کاشانی** علاقهٔ خود را به فن محاسبه و مهارت خود را دراین باب باردیگر نشان‌داده ، و از جمله ، سطح هریک از چند ضلعی‌های منتظم مهم و حجم چند وجهی‌های منتظم را ، هم در دستگاه شمار شصتگانی و هم در دستگاه دهگانی ، حساب کرده است ، و اگرچه دستورهایی را که برای محاسبهٔ سطح و حجم داده به ساده‌ترین صورت خود درنیاورده لیکن نتیجهٔ محاسباتش بسیار دقیق است.

کاشانی جدول جیب را درجه به درجه (از یک درجه تا نود درجه[۱]) و روش به‌کار بردن آن و بسیار جدولهای مفید دیگر را دراین مقاله آورده و جدول مضربهای عدد پی (π) را که خود، بادقتی که سالها بعداز زمان وی بی‌رقیب ماند، حساب کرده و نتیجه را ، هم در دستگاه شصتگانی و هم در دستگاه دهگانی ، به اختصار ثبت کرده است[۲].

---

۱ ـ **مفتاح** ، ص ۱۱۶ (دربارهٔ جدول جیب خاطر نشان می‌کنیم که اصطلاح **جیب** که ریاضیدانان دورهٔ اسلامی به‌کار می‌بردند با اصطلاح کنونی سینوس (sinus) فرق دارد. و جیب هرزاویه مساوی با ۶۰ برابر سینوس آن است زیرا قدما شعاع دایرهٔ مثلثاتی را ۶۰ می‌گرفته‌اند و ما اکنون آن را واحد می‌گیریم و رجوع کنید به شمارهٔ ۱۹۶ کتاب حاضر.

۲ ← **مفتاح** ، ص ۱۰۹ تا ۱۱۰.

همچنین طریقهٔ تعیین وزن مخصوص اجسام را بیان کرده[۱] و جداولی برای این کار از کتاب «میزان‌الحکمه» تألیف **عبدالرحمان خازنی** اقتباس و آنها را تصحیح کرده و روش به کار بردن آنها را نوشته است[۲].

* * *

چون بحث در مطالب و نقادی این مقاله از «مفتاح‌الحساب» به تفصیل می‌انجامد ما ناچار برای رعایت جانب اختصار فقط برخی از اصطلاحات و تعریفات مفید و دستورهای آن مقاله را در اینجا می‌آوریم :

۱۸۹ـ مرکز مثلث نقطه‌ای است از سطح مثلث که از هرسه ضلع آن به یک فاصله باشد[۳] (= مرکز دایرهٔ محاطی مثلث).

کاشانی می‌گوید که مرکز مثلث در حقیقت مرکز دایرهٔ محیطی آن است و مرکز دایرهٔ محاطی را چون در مساحت مورد احتیاج است مجازاً مرکز مثلث نامیده‌اند.

۱۹۰ـ معین چهار ضلعیی است که اضلاع آن باهم مساوی و زوایای آن باهم مختلف باشند[۴] (=لوزی).

---

۱ ـ برای کسب اطلاع مختصر از کارهای ابوریحان بیرونی و خازنی در بارهٔ تعیین وزن مخصوص اجسام رجوع کنید به **الدومیلی** S ،صفحات ۱۰۰ و ۱۰۱ ـ کسانی که بخواهند در این باره اطلاعات مبسوطی کسب کنند باید به مقالات **ویدمان** (Eilhard Wiedemann) که به زبان آلمانی در این موضوع نوشته و فهرست کامل آنها و نشانی آنها در جلد چهاردهم مجلهٔ ایسیس (Isis) سال ۱۹۳۰ صفحات ۱۷۱ تا ۱۸۶ ثبت شده است رجوع کنند.

۲ ـ در بارهٔ ترجمهٔ فارسی کتاب میزان‌الحکمه رجوع کنید به **قربانی** : دو ریاضیدان ایرانی ، یادداشت ذیل صفحهٔ ۱۹.

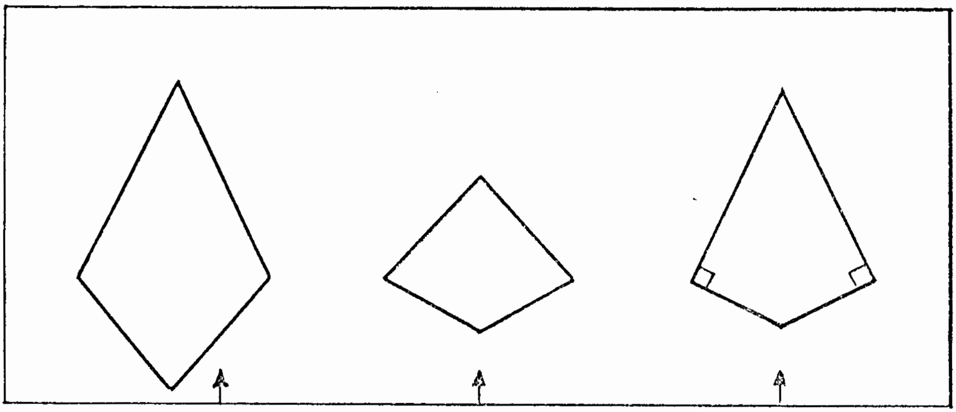
۳ ← **مفتاح** ، ص ۸۸.

۴ ← **مفتاح** ، ص ۹۶.

۱۹۱- شبیه‌المعین چهار ضلعی است که اضلاع روبروی آن دو بدو متساوی و متوازی باشند ولی با دو ضلع دیگر مساوی نباشند (= متوازی‌الاضلاع).

۱۹۲- ذوزنقة واحده = ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه.

۱۹۳- ذوالیمینین چهار ضلعی محدبی است که دو ضلع مجاور آن با هم مساوی و دو ضلع دیگر آن نیز با هم مساوی ولی با دو ضلع اول مختلف باشند[1]. البته درچنین چهارضلعی فقط دو زاویهٔ روبرو با هم مساویند و دو زاویهٔ دیگر با هم مساوی نیستند **کاشانی** می‌گوید که اگر دو زاویهٔ متساوی قائمه باشند بنایان آن را **لوزه** می‌نامند، و اگر منفرجه باشند نجارها آن را **جودانه** می‌گویند، و اگر حاده باشند ما آن را **باطیه** می‌نامیم.



جودانه باطیه لوزه

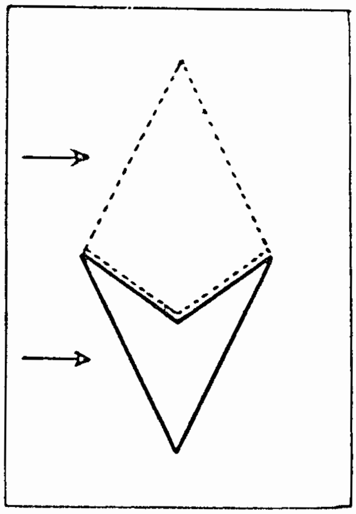
(اقسام ذوالیمینین)

۱۹۴- ذوالرجلین چهار ضلعیی است که چون برذوالیمینین افزوده شود، آن‌را

۱ ← **مفتاح**، ص ۹۶: «واما ان یکون فیه ضلعان متجاوران متساویین وکذا الآخران والاولان یخالفان الآخرین و وقع تقاطع قطراه‌فی داخله‌سمی بذی الیمینین ویکون‌فیه‌لامحاله‌زاویتان متقابلتان متساویتین فقط. اما **قائمتین** فیسمیه‌البنایون باللوزه واما منفرجین ویسمیه‌النجارون جودانه و اما حادتین و نسمیه‌الباطیة.

تمام می‌کند وبه‌صورت معین درمی‌آورد. یعنی در واقع چهار ضلعی مقعری‌است‌که دو ضلع مجاور آن باهم و دو ضلع دیگر آن نیز باهم مساوی باشند[۱].

۱۹۵ـ منحرف آن چهار ضلعی است‌که به این صورتها نباشد[۲] (چهار ضلعی نامشخص).



۱۹۶ـ جیب ـ نصف‌وتر یک قوس‌را جیب نصف آن‌قوس نامند[۳]. درشکل زیر AD جیب قوس AC است (C وسط قوس AB و D وسط پاره خط AB است).

در اینجا لازم‌است این‌نکته را‌خاطرنشان‌کنیم که در محاسبات، اصطلاح **جیب** چنانکه درذیل‌شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۱۲۴ کتاب‌حاضر گفتیم، باآنچه امروزه **سینوس** (sinus) می‌نامیم تفاوت دارد. در واقع جیب هرقوس شصت‌برابر سینوس‌آن قوس می‌باشد و به همین دلیل است‌که مورخان ریاضی، امروزه جیب قوس a را با علامت Sin a (با S بزرگ) وسینوس آن را با علامت *sin* a (با s کوچک) می‌نویسند:

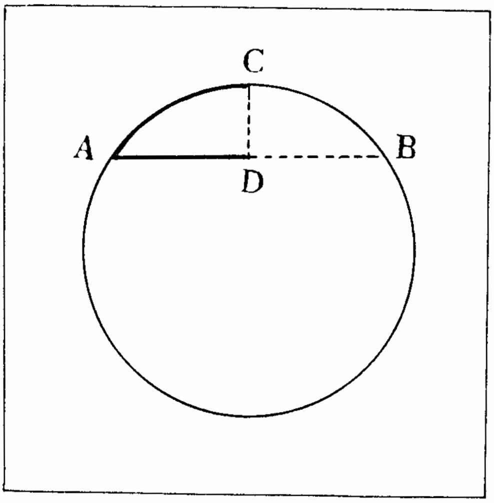
۱ ← **مفتاح**، ص ۹۶ : «و تمام ذی‌الیمینین الی المعین تسمیه بذی رجلین».

۲ ← **مفتاح**، ص ۹۶ : «و سالم یکن علی هذه الاشکال سمی منحرفاً».

۳ ← **مفتاح**، ص ۱۰۶ : «و نصف و ترالقوس جیب‌لنصف ذلک القوس».

$$\text{Sin } a = ۶۰ \cdot \sin a$$

شاید ذکر این نکته هم در اینجا به مورد باشد که نه لفظ جَیْبْ عربی که به معنی گریبان و یخه است، ونه لفظ لاتینی سینوس (sinus) که به معنی انحناء و سطح خمیده است ، هیچیک تناسبی با مفهوم تابعی که این الفاظ برای نامیدن آن

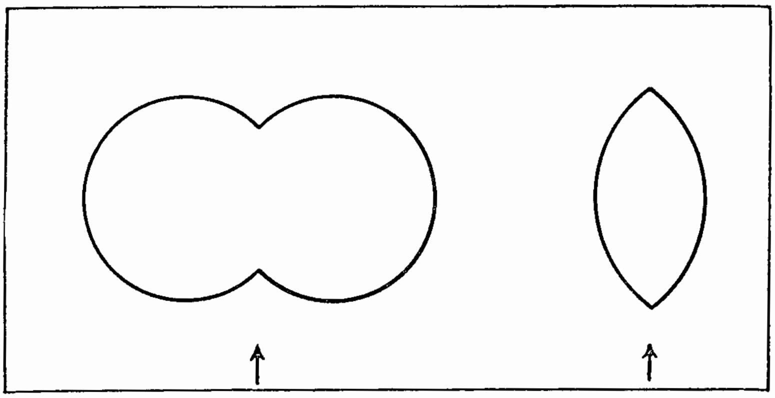


مصطلح شده است ندارند. علت این امر این است که در آغاز نام هندی اَرْدَهاجیا که به معنی نصف وتر است توسط آرْیَبْهَطَ ریاضیدان هندی که در اواخر قرن پنجم و نیمهٔ اول قرن ششم میلادی می‌زیست برای نامیدن تابع مذکور به کار رفت وبعد آن را به اختصار جیا یا جیوَ (به معنی وتر) نامیدند و این لفظ در نزد ریاضیدانان اسلامی رفته رفته به‌صورت جَیْبْ تحریف شد ودر قرن دوازدهم میلادی گراردوس کرمونسیس (Gerardus Cremonensis) ایتالیائی هنگام ترجمهٔ آثار ریاضی اسلامی اصل این لفظ را به خطا «جیب» عربی پنداشت و آن را به لفظ سینوس لاتینی که کمابیش همان معنی جیب عربی را می‌دهد ترجمه کرد(۱).

۱ ← مصاحب، حکیم خیام : ذیل صفحهٔ ۹۳ - سمیث H : ص ۶۱۵ و ۶۱۷.

۱۹۷ـ سهم ـ عمود خارج از وسط یک قوس به وتر آن قوس را بعضی سهم آن قوس و بیشتر ریاضیدانان سهم نصف آن قوس می‌نامند[۱].

۱۹۸ـ اهلیلجی عبارت است از سطح محصور بین دوقوس متساوی کوچکتر از نیمدایره و متعلق به دو دایرهٔ متساوی[۲].



شلجمی اهلیلجی

۱۹۹ـ شلجمی یعنی سطح محصور بین دو قوس متساوی بزرگتر از نیمدایره و متعلق به دو دایرهٔ متساوی[۱].

۲۰۰ـ حلقهٔ مسطحه ـ عبارت‌است از سطح محصور بین دودایرهٔ متحدالمرکز[۳] (= تاج).

۲۰۱ـ هلالی و نعلی ـ سطح محصور بین دوقوس دایره که از نیمدایره بیشتر نباشند (متعلق به دو دایرهٔ متقاطع خواه متساوی وخواه نامتساوی) که تحدب آنها

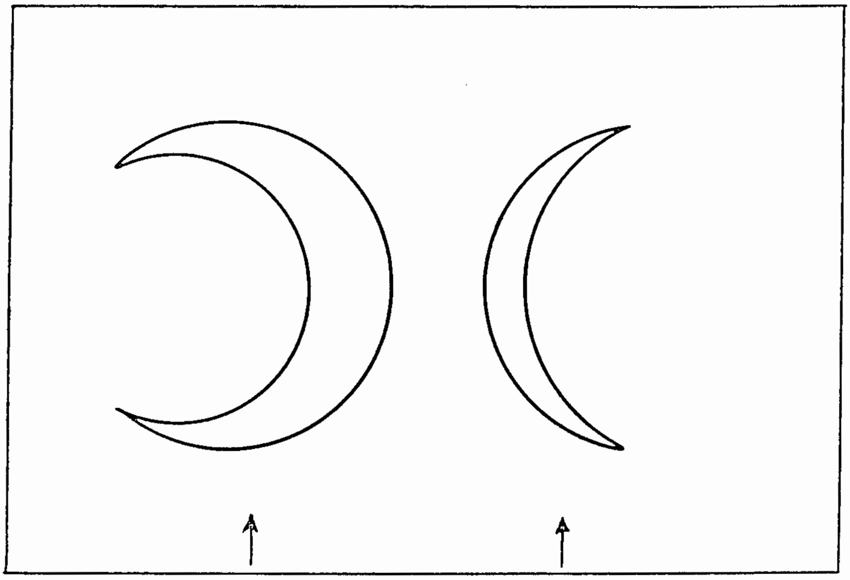
---

۱ ← **مفتاح**، ص ۱۰۶ : « والعمود الخارج من منتصف القوس علی منتصف الوتر سهم لتلک القوس عند بعض ولنصف القوس عند الاکثرین » .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۱۰۶ : « الاهلیلجی هو المحاط بقوسین متساویین من دائرتین متساویتین کل منهما اصغر من نصف المحیط وان کانا اکثر فنسمیه بالشلجمی» .

۳ ← **مفتاح**، ص ۱۰۶ : «الحلقة المسطحه هی سطح محیط به دائرتین مرکز هما واحد» .

دریک جهت باشد **هلالی** نامیده می‌شود و اگر دو قوس مذکور از نیمدایره بیشتر باشند شکل **نعلی** نامیده می‌شود[۱] .



نعلی هلالی

۲۰۲ـ ضلع‌الکره = آنچه امروزه **قاچ کروی** می‌نامیم یعنی جسم محصور بین سطح کره و سطوح نیمدایرهٔ عظیمهٔ آن[۲] .

۲۰۳ ـ باب سوم از مقالـهٔ چهارم « مفتاح‌الحساب » مربوط به چند ضلعیهای منتظم است[۳] . **کاشانی** قطر دایـرهٔ محاطی چند ضلعی منتظم را **قطر اقصر** و قطر

۱ ← **مفتاح**، ص۱۰۷ : « الهلالی سطح مستویحیط به قوسان لیسا اکثرمن النصف من دائرتین اما متساویتین اومختلفتین محدبهما الی جهةواحدة وما کان کل واحدمن القوسان اکثر من النصف سمی نعلیا .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۱۲۰ : « ضلع الکره هوما احاط به نصفا عظیمتین و سطح کروی یکون نصف قطرها مساویاالنصف قطرالدائرتین وهویشبه اضلاع البطیخ » .

۳ ← **مفتاح** ، ص ۱۰۰ تا ۱۰۶ .

دایرهٔ محیطی آن را **قطراطول** چند ضلعی منتظم نـامیده است و برای محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محـاطی (r) و شعاع دایرهٔ محیطی (R) برحسب ضلع چند ضلعی (a) و عدهٔ اضلاع آن (n) دستورهایی داده‌است که باعلائم و اصطلاحات کنونی به‌صورت زیر درمی‌آیند[۱] :

$$R = \frac{a}{۲ \sin \frac{۱۸۰^\circ}{n}}$$

و :

$$r = \frac{a}{۲} \cot g \frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

و برای محاسبهٔ مساحت (S) چندضلعی منتظم از دستور :

$$\frac{S}{a^۲} = \frac{n}{٤} \cot g \frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

استفاده کرده و مقدار $\frac{n}{٤} \cot g \frac{۱۸۰^\circ}{n}$ را برای مثلث‌متساوی‌الاضلاع و پنج ضلعی وشش‌ضلعی وهفت‌ضلعی وهشت‌ضلعی‌ونه‌ضلعی وده‌ضلعی ودوازده‌ضلعی وپانزده‌ضلعی و شانزده ضلعی منتظم هم در دستگاه شمار شصتگانی وهم باکسرهای اعشاری که خود مخترع آنها است حساب کـرده و در دوجدول قرار داده است تا برای محاسبهٔ مساحت S مربع ضلع یعنی $a^۲$ را دراعداد مذکور ضرب کنند . دراینجا ما خلاصهٔ جدولی را که در دستگاه دهگانی حساب شده است نقل می‌کنیم[۲] .

---

۱ ← **مفتاح**، ص ۱۰٤ و ۱۰۵ : « و اما استخراج‌الابعاد ... و اما بالحساب و هوان‌نقسم‌مائة وثمانين اما علی‌عددالاضلاع فماخرج نأخذجيبه وجيب‌تمامه ثم‌نضرب‌ذرعان ضلع‌واحد فی‌جيب تمامه تارة وفی‌ستين‌اخری و نقسم‌كل‌واحد علی جيبه خرج من‌الاول‌مقدار نصف قطرالدائرةالداخلة و من‌الثانی نصف قطرالدائرةالخارجة »

۲ ← **مفتاح**، ص ۱۰۳ .

۰ر۴۳۳ ۰۱۲	×	مربع یک ضلع آن	=	مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع
۱ر۷۲۰ ۴۷۷	×	»	=	مساحت پنج ضلعی منتظم
۲ر۵۹۸ ۰۷۶	×	»	=	مساحت شش ضلعی منتظم
۳ر۶۳۳ ۹۱۴	×	»	=	مساحت هفت ضلعی منتظم
۴ر۸۲۸ ۴۴۷	×	»	=	مساحت هشت ضلعی منتظم
۶ر۱۸۱ ۸۲۵	×	»	=	مساحت نه ضلعی منتظم
۷ر۶۹۴ ۹۰۹	×	»	=	مساحت ده ضلعی منتظم
۱۱ر۱۹۶ ۱۵۲	×	»	=	مساحت دوازده ضلعی منتظم
۱۷ر۶۴۲ ۳۶۳	×	»	=	مساحت پانزده ضلعی منتظم
۲۰ر۱۰۹ ۳۵۸	×	»	=	مساحت شانزده ضلعی منتظم

مثلاً برای محاسبهٔ مساحت شش‌ضلعی منتظمی که طول هرضلع آن ۲۰ ذراع و نیم باشد کافی است مربع عدد ۲۰ر۵ یعنی ۴۲۰ر۲۵ را درعدد ۲ر۵۹۸ ۰۷۶ که درجدول است ضرب کنیم تا مساحت آن به دست آید:

$$S = ۱\,۰۹۱ر۸۴۱\,۴۳۹$$

۲۰۴ـ علاوه‌براین در مورد بعضی از چند ضلعی‌های منتظم روابطی را که مابین ضلع (a) ومساحت (S) وشعاع دایرهٔ محاطی (r) برقرار است به‌دست می‌دهد تا بتوان آنها را از روی یکدیگر حساب کرد. وگاهی هریک از این روابط را به‌چند شکل بیان می‌کند.

مثلاً درمثلث متساوی‌الاضلاع[۱]:

$$S=\sqrt{۳\left(\frac{a}{۲}\right)^{۴}}=\sqrt{\frac{h^{۴}}{۳}}$$

و:

$$\text{طول ارتفاع}=h=\sqrt{\frac{۳a^{۲}}{۴}}$$

۱ ← **مفتاح**، ص ۹۵ (فصل سوم).

و درمورد **شش ضلعی منتظم**[۱] :

$$S=\sqrt{۱۲r^{۴}}$$

و

$$S=\frac{\sqrt{۲۷a^{۴}}}{۲}$$

و

$$۲r=\sqrt{۳a^{۲}}$$

و

$$(S)^{۲}=a^{۳}(۶a)\left(۱+\frac{۱}{۸}\right)$$

و درمورد **هشت ضلعی منتظم**[۲] :

$$S=(۲r)^{۲}-a^{۲}=۲a^{۲}+\sqrt{۲a^{۲}}\times ۲a=۲a^{۲}(۱+\sqrt{۲})$$

$$۲r=\sqrt{۲a^{۲}}+a=a\,(\sqrt{۲}+۱)$$

$$a=\sqrt{۲(۲r)^{۲}}-۲r=۲r(\sqrt{۲}-۱)$$

۲۰۵ ـ کاشانی برای محاسبهٔ مساحت مثلث غیرمشخص و استخراج بعضی از ابعاد آن برحسب ابعاد دیگر ، دستورهایی می‌دهد[۳] که اگر اضلاع مثلث را a و b و c و شعاع دایرهٔ محاطی آن را r و ارتفاع نظیر رأس A را $AH=h_a$ و مساحت مثلث را S ونصف محیط آن را p بنامیم آنهارا به صورتهای زیر می‌توان نوشت :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

و

$$S=\frac{r(a+b+c)}{۲}$$

و

$$h_a=c\sin B$$

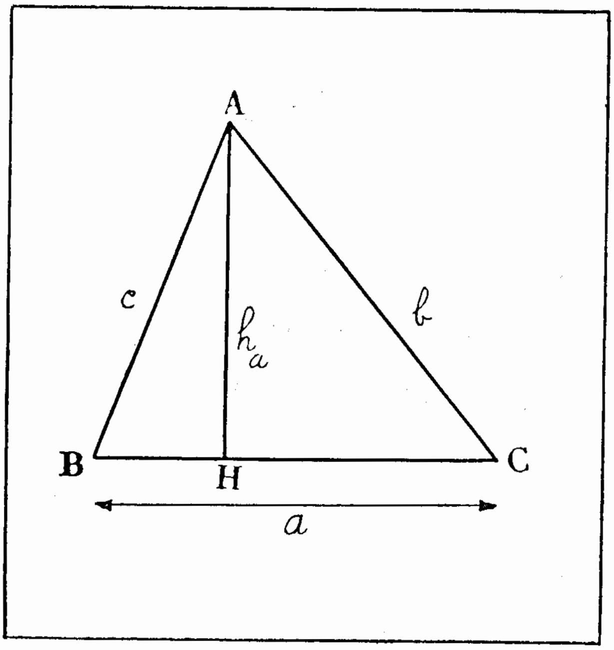
۱ ← مفتاح ، ص ۱۰۵ (فصل چهارم) .

۲ ← مفتاح ، ص ۱۰۵ (فصل پنجم) .

۳ ← مفتاح ، ص ۸۸ تا ۹۵ .

اگر اضلاع مثلث معلوم باشند و بخواهیم فاصلهٔ پای ارتفاع AH را مثلاً از رأس B پیدا کنیم :

$$BH = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲a}$$



(این همان دستور معروف $b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos B$ است که درآن به‌جای $c\cos B$ مقدار BH قرار گرفته است) .

اگر یک ضلع (c) و دو زاویه از مثلث معلوم باشد واضح است که زاویهٔ سوم نیز معلوم است و :

$$a = \frac{c\sin A}{\sin C}$$

و

$$b = \frac{c\sin B}{\sin C}$$

(و اینها در واقع همان دستور کلی $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ هستند) .

و اگر دوضلع b و c و زاویهٔ بین آنها معلوم باشد و بخواهیم ضلع دیگر را حساب کنیم :

$$a^۲=(b\pm c\cos A)^۲+c^۲\sin^۲ A$$

(و این نیز درواقع همان‌دستور $a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$ است که اگر A منفرجه باشد علامت $-۲bc\cos A$ مثبت می‌شود) .

کاشانی دستور $r=\frac{bc\sin A}{a+b+c}$ را از خود می‌شمارد[۱] و برای محاسبهٔ مساحت مثلث دستور $S=\frac{r(a+b+c)}{۲}$ را ذکر می‌کند و عجیب است که این دو دستور را باهم مقایسه نمی‌کند تا دستور کلی $S=\frac{۱}{۲}bc\sin A$ را به دست آورد .

۲۰۶ـ درمورد چند وجهی های‌منتظم، علاوه بر پنج چند وجهی منتظم معروف (اجسام افلاطونی) که عبارتند ازچهار وجهی منتظم ومکعب وهشت وجهی‌منتظم و بیست وجهی منتظم و دوازده وجهی‌منتظم ، **کاشانی** دوقسم چند وجهی نیم‌منتظم نیز درنظر می گیرد[۲] : یکی چهارده وجهی نیم منتظم که هشت وجه آن مثلثهای متساوی‌الاضلاع و شش وجه دیگر آن مربع هستند . هریال این جسم مساوی با شعاع کرهٔ محیط برآن‌است . ویکی دیگر سی‌ودو وجهی نیم منتظم است که بیست

۱ ← **مفتاح**، ص ۹۴ و ۹۵ : « ومنهاالعمودالخارج عن‌مرکزالمثلث ... و اما بالحساب فنصرب احدالضلعین فی‌الاخر ونقسم الحاصل علی‌مجموع الاضلاع الثلثة فماخرج نضربه فی‌جیب الزاویة‌التی‌محیط بهاالمضروبان ونقسم‌الحاصل علی‌الستین فماخرج فهوالعمودالخارج عن‌مرکزالمثلث علی کل واحدمن اضلاعه ... ضربناه فی‌نصف‌مجموع الاضلاع ... و هوالمساحة ، ... و استخراج هذالعمود بهذا الطریق مما استنبطناه » .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۱۳۰ تا ۱۳۲ .

وجه آن مثلثهای متساوی‌الاضلاع و دوازده وجه آن پنج ضلعی منتظم می‌باشند . هریک از یالهای این جسم مساوی با ضلع ده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ محیطی چند وجهی است (← آخرین شکل از مقالهٔ سیزدهم تحریر اصول اقلیدس و ذیل شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۱۳۸ کتاب حاضر) .

۲۰۷ـ کاشانی برای هریک از هفت جسم منتظم یا نیم منتظم مذکور یال را برحسب شعاع کرهٔ محیطی جسم و برعکس، وهمچنین حجم جسم را حساب کرده است . اما دستورهایی که داده همه به ساده ترین‌صورت خلاصه نشده‌اند ودراینجا چند مثال ازمحاسبات **کاشانی** را برای نمونه می‌آوریم ومعادل آنها را باقراردادهای کنونی می‌نویسیم :

الف ـ حجم چهار وجهی منتظم برحسب شعاع کرهٔ محیطی آن مساوی است با(۱) :

$$\frac{۲}{۹} \times ۲R \times \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۲}{۳}(۲R)^۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}(۲R)^۲}$$

این دستور پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$V_٤ = \frac{۸}{۲۷} R^۳ \sqrt{۳}$$

ب ـ طول یال بیست وجهی منتظم برحسب شعاع کرهٔ محیطی آن مساوی است با(۲) :

---

۱ ← **مفتاح**، ص ۱۲۸ : « اما الاول فهوذواربع قواعد مثلثات متساویات فی الکرة ... والعمل فیه ان نربع قطر الکرة المحیطة به و نأخذ جذر ثلثیه و کذاجذر نصف مربع القطرفالاول ضلع القاعده والثانی عمود مثلث القاعدة نضرب احدهما فی نصف الاخر یحصل مساحة احدی قواعده نضربه فی تسعی قطر تلک الکرة یحصل المساحة » .

۲ ← **مفتاح**، ص ۱۲۹ : « واما الرابع فهوذوعشرین قاعدة مثلثات متساویات الاضلاع فی الکرة والعمل فیه ان نربع قطر تلک الکرة و نأخذ نصف عشره و ننقص جذره عن نصف قطر الکرة فما بقی نحفظه ونزید مربعه علی خمس مربع القطر ونأخذ جذر المجموع فهوضلع قاعدة المجسم » .

$$a_{۲۰}=\sqrt{\left[R-\sqrt{\frac{۱}{۲۰}(۲R)^{۲}}\right]^{۲}+\frac{۱}{۵}(۲R)^{۲}}$$

این مقدار پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$a_{۲۰}=\frac{R}{۵}\sqrt{۱۰(۵-\sqrt{۵})}$$

ج ـ طول یال دوازده وجهی منتظم برحسب شعاع کرهٔ محیطی آن مساوی است با[۱] :

$$a_{۱۲}=\sqrt{۵\times\frac{۱}{۱۲}\times(۲R)^{۲}}-\sqrt{\frac{۱}{۱۲}(۲R)^{۲}}$$

این دستور پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$a_{۱۲}=\frac{۱}{۳}R(\sqrt{۱۵}-\sqrt{۳})$$

د ـ قطر کرهٔ محیطی دوازده وجهی منتظم برحسب یال آن از دستور زیرحاصل می‌شود[۲] :

$$(۲R)^{۲}=d^{۲}=۳(a+\sqrt{a^{۲}+\frac{a^{۲}}{۴}}-\frac{a}{۲})^{۲}$$

---

۱ ← **مفتاح**، ص ۱۳۰ : «واماالخامس فهوذواثنی‌عشرةقاعدة مخمسات‌متساویات الاضلاع والزوایا وقع فی‌الکرةوالعمل فیه‌ان نأخذ نصف سدس مربع‌القطر و نحصل جذره ثم نضرب ذلک‌اعنی نصف‌السدس‌المذکور فی‌خمسة دائماً و نأخذ جذرالحاصل وننقص‌منه‌الجذر السابق فمابقی‌فهوضلع مخمس‌القاعدة» .

۲ ← **مفتاح**، ص ۱۳۰ : « وان کان‌ضلعه (یعنی‌ضلع‌دوازده‌وجهی منتظم) معلوماً و قطر الکرة‌المحیطة مجهولا نربع‌الضلع ونزید علی‌ذلک‌المربع ربعه و نأخذ جذرالمجموع و ننقص عنه نصف‌الضلع فمابقی نزید علی‌الضلع‌المعلوم و نضرب مربع مابلغ فی‌الثلثة دائماً فالحاصل هومربع قطرالکرة التی‌یحیط بالمجسم» .

این دستور پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$d=\frac{a}{۲}(\sqrt{۱۰}+\sqrt{۳})$$

هـ ـ یال سی‌ودو وجهی نیم منتظم برحسب شعاع کرهٔ محیطی‌آن مساوی‌است با[۱] :

$$a_{۳۲}=\sqrt{\frac{(۲R)^{۲}}{۱۶}\times ۵}-\sqrt{\frac{(۲R)^{۲}}{۱۶}}$$

این دستور پس از ساده کردن به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$a_{۳۲}=\frac{R}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$$

۲۰۸ـ کاشانی درپایان فصل هفتم از باب هفتم از مقالهٔ چهارم خاطرنشان می‌کند که معمولاً درکتابهای‌مربوط به‌اندازه گیری‌سطح وحجم، دستورمحاسبهٔ‌حجم این اجسام‌را نمی‌نویسند وسی گوید که اواین‌دستورها را ازکتاب «اصول‌اقلیدس[۲]» استخراج کرده و اعداد حاصل را درجدولی قرارداده است . این اعداد درجدول مذکور در دستگاه شصتگانی نوشته شده‌است[۳] . در واقع **کاشانی** طول یالها وقطر

۱ ← **مفتاح** ، ص ۱۳۱ : « واما‌السابع‌فهوذواثنتین‌وثلثین قاعدة یکون‌عشرون‌منها مثلثات‌متساویات‌الاضلاع واثنتی‌عشرة منهامخمسات‌اضلاعها اضلاع تلک‌المثلثات فکل واحد منها مساولضلع المعشرالواقع فی‌اعظم دائرة وقعت فی‌الکرة‌والعمل فیه‌ان‌نقسم مربع‌قطرالکرة علی‌ستة‌عشرونأخذجذرالخارج‌من القسمة‌ثم نضرب‌الخارج‌من القسمة فی‌خمسة ونأخذ جذرالحاصل و ننقص منه‌الجذرالسابق فمابقی‌فهوضلع قاعدة‌المجسم » .

۲ ← **تحریراصول اقلیدس** توسط خواجه نصیرالدین طوسی ، مقالهٔ سیزدهم از شکل (قضیهٔ) ۱۳ تا آخرآن مقاله ویا ← **هیث : سیزده مقاله** ، ج ۳ صفحات ۴۶۷ تا ۵۱۱ .

۳ ← **مفتاح** ، ص ۱۳۳ .

کرهٔ محیطی یا طول ارتفاع اجسام مذکور را دردستگاه شصتگانی با پنج رقم (یعنی تا خامسه) حساب کرده و درجدول مذکور قرار داده است .

۲۰۹ـ باب هشتم از مقالهٔ چهارم « مفتاح الحساب » دربارهٔ چگونگی محاسبهٔ حجم بعضی از اجسام از روی وزن آنها است و درآن **کاشانی** پس از بیان اینکه چگونه حجم اجسام را به وسیلهٔ وزن آنها تعیین می کنند دوجدول تشکیل داده است که درآنها نام سی جسم از قبیل طلا وجیوه و سرب و غیره را ثبت کرده و درمقابل آنها در یک جدول وزن آب هم حجم صدمثقال از هرجسم و در دیگری وزن هرجسم را درصورتی که حجم آن مساوی با حجم صدمثقال طلا باشد نوشته است .

درآخر این باب **کاشانی** خاطرنشان می کند که **عمادالدین خوام بغدادی** دو جدول از نسبتهای فلزات و جواهر و بعضی از مایعات را ازکتاب « میزان الحکمه » اقتباس کرده و در « رسالة البهائية » آورده است و دربسیاری از نسخه های خطی آن رساله این جدولها را نسخه نویسان غلط ثبت کرده‌اند و هیچیک از دوشارح آن رساله[۱] به این اشتباهات اشاره نکرده‌اند و **کمال الدین فارسی** در شرح خود گفته است که راهی برای تصحیح این جدولها ندارد و **کاشانی** آنها را از روی کتاب « میزان الحکمه » تصحیح کرده است .

۲۱۰ـ یکی از بابهای جالب توجه « مفتاح الحساب » باب نهم مقالهٔ چهارم آن است که موضوع آن محاسبهٔ حجم بناها و عمارات است و **کاشانی** در مقدمهٔ این باب می نویسد که[۲] : « اصحاب این فن فقط حجم طاق و ازج را ، آن هم به وجه

۱ ← مقصود یکی **کمال الدین فارسی** است که « اساس القواعد فی اصول الفوائد» را درشرح « فوائدالبهائیه » نوشته و دیگری **عمادالدین کاشانی** است که شرح دیگری بر « فوائدالبهائية » نوشته است (رجوع کنید به **قربانی :** دو ریاضیدان ایرانی ، صفحات ۱۷ تا ۱۹) .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۱۳۹ : « فی مساحة الابنية والعمارات ولم یذکر فیها اصحاب هذا الفن سوی الطاق والازج وذلک ایضاً لیس علی ما ینبغی فاوردتها علی ما ینبغی مع سائره لان الاحتیاج بمساحة العمارات اکثر من سائرها » .

ناقصی ، درکتابهای خود می‌نویسند ، و من همهٔ این محاسبات را آنطورکه باید و شاید ذکرمی کنم زیرا احتیاج به‌اندازه گیری‌حجم عمارات‌بیش‌ازسایر حجمهااست» .

دراین باب **کاشانی** طاق و ازج وقبه ومقرنس (وانواع آن) را تعریف کرده و سطح وحجم هریک را حساب کرده و محاسبات را ، هم در دستگاه شمار دهگانی، وهم در دستگاه شصتگانی انجام داده وکسانی که مایل باشند ازین محاسبات آگاه شوند باید به کتاب « مفتاح‌الحساب » (صفحات ۱۳۹ تا ۱۵۵) رجوع کنند .

نگاهی به مقالهٔ پنجم مفتاح‌الحساب

۲۱۱ـ باب اول مقالهٔ پنجم دربارهٔ جبر و مقابله و مشتمل بر ده فصل است . درفصل اول **کاشانی** علم جبر ومقابله واصطلاحات‌مقدماتی آن‌را تعریف می کند وما بعضی ازآن تعریفها و اصطلاحات را با معادل کنونی آنها دراینجا می‌آوریم :

جبرومقابله علم به قانونی‌است که به‌وسیلهٔآن بسیاری از مجهولات عددی از معلومات مخصوص با روش ویژه‌ای شناخته می‌شود(۱) .

مسئلةالجبریه = معادله(۲) .

متعادلان = دوطرف معادله .

استثناء = جملهٔ منفی .

زاید = مثبت .

ناقص = منفی .

---

۱ ← **مفتاح** ، ص ۱۵۵ : « علم‌الجبر والمقابلة هوعلم بقانون یعرف‌منه کثیر من‌المجهولات‌العددیة من‌معلوماتهاالمخصوصة بوجه مخصوص » .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۱۵۶ : « و اذا انتهی‌العمل‌الی‌التعادل یقال‌له‌المسئلةالجبریة» به همین‌اعتباراست که شش‌معادلهٔ درجهٔ‌اول‌ودوم را که بین‌قدما مشهوربوده «الست‌الجبریة» ویا « المسائل‌الست » می‌نامیدند (رجوع کنید به شمارهٔ ۲۱۴ متن وبه ذیل شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۵۰ کتاب حاضر) .

معنی جبر ـ اگر دریک طرف معادله یا هردوطرف آن جملهٔ کم کردنی (استثناء) وجود داشته باشد آن جمله را حذف می کنیم و مثل آن را به طرف دیگر می افزائیم و مانده یک طرف را با مجموع طرف دیگر معادل می کنیم و این معنی جبراست[1].

مثال ـ معادلهٔ $x^2-2x=10$ پس از عمل جبر چنین می شود :

$$x^2=10+2x$$

معنی مقابله ـ اگر یک جمله در هردوطرف معادله مشترک باشد آن جمله را از دوطرف معادله حذف می کنیم و این معنی مقابله است[2] .

معنی اعمال رد وتکمیل ـ اگر دریکی ازدوطرف معادله ضریب جملهٔ بزرگترین درجه بزرگتر از یک (یا کوچکتر از یک) باشد دوطرف معادله را به آن ضریب تقسیم (یا در عکس آن ضریب ضرب) می کنیم تاضریب بزرگترین درجه مساوی با یک شود . اگر ضریب مذکور بزرگتر از یک باشد عمل را **رد** و اگر کوچکتر ازیک باشد عمل را **تکمیل** می نامند[3] .

مثال رد ـ معادلهٔ $5x^2+10x=30$ پس از عمل رد چنین می شود :

$$x^2+2x=6$$

مثال تکمیل ـ معادلهٔ $\frac{1}{2}x^2+5x=7$ پس ازعمل تکمیل چنین می شود:

$$x^2+10x=14$$

۲۱۲ـ درفصلهای دوم وسوم این باب **کاشانی** قاعدهٔ جمع وتفریق کثیرالجمله ها

۱ ← **مفتاح** ، ص ۱۵٦ : «وان کان فی احدالمتعادلین اوفی کلیهما استثناء نطرح المستثنی برامه حتی یبقی المستثنی منه وحده، ای یصیر تاما ثم نزیدمثل المستثنی المطروح علی الاخر ونعادل بین الباقی والمجموع فهومعنی الجبر» .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۱۵٦ : «و اذا کان جنس واحد موجود فی کل من المتعادلین نسقط المشترک من کل منهما ونعادل بین الباقیین ... وهذامعنی المقابلة» .

۳ ← **مفتاح** ، ص ۱۵۷ .

را بیان می‌کند ، و درفصل چهارم آن به بیان قاعدهٔ ضرب کثیرالجمله ها می‌پردازد و مثلاً حاصل‌ضرب :

$$(x^3-x^2+2x+5-\frac{1}{x})(x^3+2x^2-x-4)$$

را مساوی با :

$$x^6+x^5-x^4+6x^3+11x^2-15x-19+\frac{4}{x}$$

می‌یابد[1] و برای این کار جدولی تشکیل می‌دهد که با علائم کنونی معادل است با :

مضروب

$-\frac{1}{x}$	$-x^2$	x^3	$2x$	5	مضروب فیه
$-2x$	$-2x^4$	$2x^5$	$4x^3$	$10x^2$	$2x^2$
$-x^2$	$-x^5$	x^6	$2x^4$	$5x^3$	x^3
$\frac{4}{x}$	$4x^2$	$-4x^3$	$-8x$	-20	-4
	x^3	$-x^4$	$-2x^2$	$-5x$	$-x$

درجدول‌مذکور واو عطف (و) به جای علامت جمع و حرف (الا) به‌جای علامت تفریق به‌کار رفته و به جای علامت + (علامت عدد مثبت) دوحرف (**ید**) که مشتق ازکلمهٔ (**زاید**) است گذاشته شده و به‌جای علامت — (علامت عددمنفی) دوحرف (**قص**) که مشتق ازکلمهٔ **ناقص** است به‌کار رفته .

دراینجا باید متذکرشوم که **ابن‌قنفود** ازمردم قسطنطنیه درقرن هشتم هجری

---

۱ ← **مفتاح** ، ص ۱۶۱ .

و **قلصادی** از اعراب اندلس درقرن نهم هجری نیز علائم ورموز جبری درآثار خود به‌کار برده‌اند[۱] .

۲۱۳ـ درفصل پنجم این باب **کاشانی** قاعدهٔ تقسیم یک‌جمله‌ای بریک‌جمله‌ای وکثیرالجمله به یک‌جمله‌ای را شرح می‌دهد[۲] و درفصل ششم آن قاعدهٔ استخراج جذر از یک جمله‌ای‌ها وکثیرالجمله‌ها (درصورتی‌که مربع کامل باشند) را بیان می‌کند[۳] و چندین مثال می‌آورد که از جملهٔ آنها است :

$$\sqrt{4x^2+20x^3+25x^4}=5x^2+2x$$

و :

$$\sqrt{4x^2+20x^3+41x^4+40x^5+16x^6}=2x+5x^2+4x^3$$

و :

$$\sqrt{4x^2+20x^3+41x^4+52x^5+46x^6+24x^7+9x^8}$$
$$=2x+5x^2+4x^3+3x^4$$

در واقع **کاشانی** دربیان قاعدهٔ استخراج جذر کثیرالجمله‌ها از اتحاد :

$$(a+b+c+\cdots)^2=a^2+b^2+c^2+\cdots+2ab+2ac+2bc+\cdots$$

استفاده کرده است.

۲۱۴ـ درفصل هفتم این باب **کاشانی** معادلات ششگانهٔ جبری (المسائل الست) را به‌طریق زیر تعریف کرده است[۴] :

---

۱ ← **قربانی** : ابن‌قنفوذ ـ **قربانی** : علامتهای جبری .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۱۶۲ .

۳ ← **مفتاح** ، ص ۱۶۳ .

۴ ← این معادلات ازقرن‌سوم هجری‌به‌بعدبین ریاضیدانان اسلامی معروف بوده است.

مفردات : $\left\{\begin{array}{l} ax=c \\ ax^2=bx \\ ax^2=c \end{array}\right.$ مقترنات : $\left\{\begin{array}{l} ax^2+bx=c \\ ax^2+c=bx \\ ax^2=bx+c \end{array}\right.$

و در فصل هشتم همین باب به‌حل آنها پرداخته است .

۲۱۵ـ مطلب جالب توجه دراین باب (**باب اول** از مقالهٔ پنجم) این است که **کاشانی** ظاهراً به کلی از کارهای جبری **خیام** بی‌اطلاع بوده‌است، چه‌درفصل هفتم همین باب نوشته است[۱] : اما **اگر** تعادل بین چهار جنس متوالی ، مانند عدد و شیء و مال و کعب باشد یعنی بعضی‌ازاین‌چهار ، معادل بعضی دیگر از آنها باشد، اقسام آن‌منحصر دربیست و پنج مسأله (یعنی معادله) است[۲] و شش تا از آنها همانست که گذشت و نوزده مسأله می‌ماند وشارح « بهائیة »[۳] آورده است که **امام شرف‌الدین‌مسعودی** نوزده مسأله غیرازشش مسأله مشهور را حل کرده وطریق استخراج مجهول را درآنها آشکار ساخته است » .

شرف‌الدین محمدبن‌مسعودمسعودی صاحب کتاب معروف « جهان دانش » نیز مؤلف کتابی است موسوم به « رسالةالجبروالمقابله[٤] » و به‌احتمال قوی نوزده

---

۱ ← **مفتاح** ، ص ۱٦٦ و ۱٦۷ : « واما ان کانت التعادل بین اربعة اجناس ... » (ترجمهٔ این عبارات را از کتاب حکیم عمرخیام بعنوان عالم جبر تألیف آقای دکتر مصاحب، ص ۱۳٤ ، اقتباس کرده‌ام) .

۲ — برای فهرست این بیست‌وپنج معادله رجوع کنید به **مصاحب** : حکیم خیام ، صفحات ۱٤٥ و ۱٤٦ .

۳ ← **مصاحب** : حکیم خیام ، ذیل صفحهٔ ۱۳٤ .

٤ ← **کشف‌الظنون** (چاپ‌استانبول) ص۸٥۷ : « رسالةالجبروالمقابلة‌لشرف‌الدین محمدابن‌محمدالمسعودی و هی‌نافعةوافیة ذکرها فی‌الموضوعات ـ **و** نیز رجوع کنید به : **ستوری** P ، ج ۲ ص ٥۱ ش۸۹ **و**فهرست‌میکروفیلمهای‌دانشگاه (توسط فهرست آن کتاب) وبه‌خصوص صفحهٔ ۷۱ .

مسأله‌ای که شارح بهائیه به‌آن اشاره کرده درهمین کتاب بوده است .

آقای دکتر مصاحب می‌نویسد(۱) : « این نوزده مسأله همانها است که **خیام** آنها را حل کرده وبسیار محتمل‌است که تحقیقات خیام به **امام شرف‌الدین مسعودی** نسبت داده شده باشد » .

۲۱۶- کاشانی سپس می‌نویسد(۲) : « وهرگاه عدهٔ اجناسی که بعضی از آنها با بعضی دیگر معادل می‌شوند پنج باشد ، یعنی از عدد تا مال‌مال ، عدهٔ معادلات حاصل منحصر به نودوپنج صنف است که ذکر بیست‌وپنج صنف آنها گذشت وباقی می‌ماند هفتاد صنف و پیشینیان چگونگی استخراج مجهول را به وسیلهٔ آنها ذکر نکرده‌اند تا چه رسد به‌اینکه عدهٔ اجناس از پنج بیشتر باشد » .

توضیح - قدما عدد (a) ، یعنی جملهٔ ثابت در معادله ، و شیء (x) و مال (x^2) وکعب (x^3) و مال‌مال (x^4) و غیره را اجناس می‌نامیدند(۳) . پس اگر عدهٔ اجناسی که بعضی از آنها یا همهٔ آنها درمعادله داخل می‌شوند پنج باشد معادله از درجهٔ اول یا دوم یا سوم یا چهارم خواهد بود و چون قدما اعداد منفی را به‌کار نمی‌بردند ناچار مثلاً معادلاتی از قبیل :

$$bx+a=x^2 \quad \text{و} \quad x^2+a=bx \quad \text{و} \quad x^2+bx=a$$

را سه صنف مختلف از معادلهٔ درجهٔدوم محسوب می‌داشتند . **کاشانی** می‌گوید که انواع مختلف معادلات درجات اول و دوم و سوم وچهارم نودوپنج نوع است که بیست‌وپنج نوع ازآنها از درجات اول و دوم و سوم هستند وقدما آنها راحل کرده‌اند

---

۱ ← **مصاحب** ، حکیم خیام ، ص ۱۳۵ وذیل صفحهٔ ۱۳٤ .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۱٦۷ : « وان کانت‌الاجناس‌المتعادلة بعضهامع بعض خمسةاعنی من العدد الی‌مال‌المال فینحصر فی‌خمس وتسعین مسئلة ویکون خمس وعشرون منهاماسبق ذکرها بقی‌سبعون‌ولم یبین المتقدمون کیفیة‌استخراج المجهول‌منهافضلاً عماجاوزالاجناس‌من‌الخمسة» .

۳ — مثلاً درمعادلهٔ $ax^2=x^3$ دوجنس و درمعادلهٔ $a+cx^2=x^3$ سه جنس و درمعادله $ax^4+bx^3=cx^2+dx+e$ پنج جنس وجود دارد .

و باقی می‌ماند هفتاد نوع دیگر که کسی آنها را حل نکرده است .

۲۱۷ـ کاشانی سپس می‌افزاید[۱] : « ما چگونگی استخراج مجهول را به‌وسیلهٔ هفتاد صنفی که احدی از متقدمان ومتأخران متعرض آنها نشده است استنباط کردیم وهمچنین نوزده معادله‌ای را که گفته شده‌است که **امام شرف‌الدین مسعودی** استخراج کرده حل کردیم ، و ایکاش می‌دانستم که آنچه من یافته‌ام ساده‌تر ازآن است که **مسعودی** یافته یا آنچه او یافته ساده‌تر است یا آنچه یافته‌ایم باهم موافق هستند ، و نیز مسائل (معادلات) بسیاری غیر از آنها یافته‌ایم، مثل آنکه یکی از دوطرف معادله از یک‌جنس (= درجه) وطرف دیگرازدوجنس یا سه جنس باشد ولوآنکه درجات آنها ازهم دور باشد[۲] و به سبب زیادی اعمال وطولانی بودن بحث درآنها نمی‌توان آنها را دراین مختصر آورد و انشاءالله تعالی آنها را درکتاب جداگانه‌ای خواهیم آورد[۳] » .

۲۱۸ـ درفصل نهم همین باب **کاشانی** حل معادلاتی از قبیل :

$$\pm ax^{n+2} \pm bx^{n+1} \pm cx^{n} = 0$$

را به حل معادلهٔ درجهٔ دوم منجر می‌کند[٤]. مثلاً حل معادلهٔ $x^5 + 8x^4 = 7x^3$

۱ ← **مفتاح** ، ص ۱۶۷ : « و قداستنبطنا کیفیةاستخراج المجهول بالمسائل السبعین التی لم یتعرضها احدمن المتقدمین والمتأخرین وکذابالتسع عشرة التی قیل استخرجها الامام شرف الدین المسعودی ولیت شعری هذا ابسط مما استخرجه اوهواوکانامتوافقین اولاً وایضاً استنبطنامسائل کثیرة غیرها کما کان احدالمتعادلین جنساً واحداً والآخرجنسا اوجنسین اوثلثة، ولوکانامتباعدین فی‌الرتبة ، ولکثرة الاعمال والمباحث فیهالایلیق بهذاالمختصر وسنوردها فی کتاب مفرد انشاءالله تعالی » .

۲ ـــ رجوع کنید به شمارهٔ ۲۱۹ کتاب حاضر .

۳ ← ظاهراً عمر کاشانی برای نوشتن این کتاب کفاف نداده است .

٤ ← **مفتاح** ، ص ۱۷۰ .

را به‌حل معادلهٔ $x^2+8x=7$ مبدل می‌سازد بدون آنکه از ریشهٔ مضاعف $x=0$ معادلهٔ مذکور گفتگو کند .

۲۱۹ـ سپس درفصل دهم همین باب معادلاتی از قبیل $ax^n=bx^m$ را مورد بحث قرار می‌دهد وسی گوید انواع این معادلات بیشمار است و قاعده‌ای ازخود برای حل آنها بیان می‌کند و آن قاعده این است[1] :

اگر $n>m$ باشد داریم :

$$x^{n-m}=\frac{b}{a}$$

و ازآنجا :

$$x=\sqrt[n-m]{\frac{b}{a}}$$

مثال ـ حل معادلهٔ $64x^2=4x^6$ داریم $x^4=16$ پس $x=2$

البته کاشانی ریشهٔ صفر و ریشهٔ منفی -2 را درنظر نمی‌گیرد .

۲۲۰ـ مطلب جالب توجه دراین‌فصل (فصل ۱۰ ازباب‌اول از مقالهٔ پنجم) این است که **کاشانی** درضمن حل معادلهٔ $5x^3=40$ می‌گوید ٤۰ را بر ٥ تقسیم می‌کنیم می‌شود ۸ وکعب‌آن‌رامی گیریم، **زیرا تفاضل بین‌درجات عدد وقوهٔ سوم ۳ است**[2] . یعنی درواقع **کاشانی** می‌گوید $5x^3=(40)^0$ ودرجهٔ مقدارثابت ٤۰ راصفر می‌داند یعنی دراینجا صفر را به منزلهٔ قوهٔ عدد ثابت چهل محسوب داشته و صفررا

---

۱ ← **مفتاح**، ص ۱۷۰ : « واناالستنبطت قاعدة یخرج‌منهاجمیها وهی‌ان‌نقسم عدد ماکان عددمنزلته اقل علی‌عددماکـان عدد منزلته‌اکثر فماخرج نحفظه و نأخذالتفاضل بین عددی منزلتی‌الجنسین‌المتعادلین ونـأخذالضلع‌الاول من‌المحفوظ علی‌انه‌من‌مضلع یکون عدد منزلته بقدرالتفاضل بین عددی منزلتی‌الجنسین‌المتعادلین‌فهوشیءالمجهول » .

۲ ← **مفتاح**، ص ۱۷۱ : « لان‌التفاضل بین منزلتی‌العددوالکعب‌ثلثة وهی عدد منزلةالکعب » .

جزو اعداد به حساب آورده است (ورجوع کنید به شمارهٔ ۱۰٦ کتاب حاضر) .

۲۲۱ـ باب‌دوم ازمقالهٔ پنجم «مفتاح‌الحساب» دربارهٔ‌استخراج‌مجهول به‌طریق حساب **خطأین** است[۱] . **کاشانی** می‌گوید که این روش‌درصورتی به‌کار می‌آید که حل مسأله به یک معادلهٔ درجهٔ اول منتهی شود یعنی معادلهٔ مسأله به صورت $ax+b=c$ درآید، اما اگر استخراج‌مجهول منجر به‌ضرب کردن مجهول درخودش و یا تقسیم مجهول برخودش شود و یا به استخراج جذر یا کعب یا امثال آنها احتیاج پیدا شود دیگر این روش را نمی‌توان به‌کار بست .

خلاصهٔ این روش[۲] با علائم و اصطلاحات کنونی این است که برای حل معادلهٔ :

$$ax+b=c \qquad (۱)$$

دو عدد دلخواه مختلف x_1 و x_2 را درمعادله به‌جای x می‌گذاریم . اگر یکی از این دوعدد درمعادله صدق کند که همان عدد جواب مسأله است و گرنه مثلاً خواهیم داشت :

$$ax_1+b=c+d_1 \qquad (۲)$$

و :

$$ax_2+b=c+d_2 \qquad (۳)$$

دراین‌صورت d_1 را **خطای اول** و d_2 را **خطای دوم** می‌نامیم .

اگر دو طرف معادلهٔ (۱) را به ترتیب از دو طرف معادلات (۲) و (۳) کم کرده حاصل‌ها را برهم تقسیم کنیم حاصل می‌شود :

۱ ← **مفتاح** ، ص ۱۷۱ .

۲ — برای کسب اطلاع از تاریخچه این روش درقرون وسطی رجوع کنید به : **یوشکویچ ـ رزنفلد** ، ص ۹۱ تا ۹۷ .

$$\frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{d_1}{d_2}$$

و از آنجا ریشهٔ معادله به‌دست می‌آید :

$$x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}$$

البته چون **کاشانی** فقط اعداد مثبت‌را درنظر می‌گیرد می‌گوید که اگر هردو خطا بر c اضافه یا هردو ازآن کم شوند (یعنی اگر d_1 و d_2 هردومثبت ویا هردو منفی باشند) برای یافتن ریشهٔ معادله باید تفاضل حاصلضربهای $x_1|d_2|$ و $x_2|d_1|$ را برتفاضل $|d_1|$ و $|d_2|$ تقسیم کرد . اما اگر یکی از خطاها بر c اضافه و دیگری‌ازآن کم شود (یعنی اگر d_1 و d_2 مختلف‌العلامه باشند) برای یافتن ریشهٔ معادله باید مجموع حاصلضربهای $x_1|d_2|$ و $x_2|d_1|$ را برمجموع $|d_1|$ و $|d_2|$ تقسیم کرد .

۲۲۲ـ باب سوم از مقالهٔ پنجم « مفتاح الحساب » مختص به‌ایراد پنجاه قاعده است که به قول **کاشانی** برای‌استخراج‌مجهولات به کارمی‌آیند. مؤلف‌برای هیچیک ازاین قاعده برهان نیاورده است وازاین پنجاه قاعده فقط چهار قاعده را از استنباطات خود می‌داند که عبارتند از قاعده‌های هفتم و نهم و پانزدهم و شانزدهم که ذیلاً به‌آنها اشاره می‌کنیم .

قاعدهٔ هفتم(۱) همان دستور محاسبهٔ جملهٔ nاُم و مجموع n جمله از یک تصاعد حسابی است که اگر جملهٔ اول تصاعد را a و جملهٔ nاُم را l و تفاضل ثابت (قدر نسبت) را d بنامیم به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$l = a + (n - ۱)d$$

۱ ← **مفتاح**، ص۱۷۷ : « اذا اردنا جمع الاعداد المتزایده من الواحد وغیرها بتفاضلات متساویات و هذه‌القاعده مما استنبطناه ... » .

و :

$$S_n = \frac{n(a+l)}{۲}$$

قاعدهٔ نهم[۱] دستور محاسبهٔ مجموع تضاعیف واحد یعنی مجموع n جمله از یک تصاعد هندسی است که جملهٔ اول آن واحد و قدر نسبت آن ۲ باشد :

$$۱ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + ۲^٤ + \cdots + ۲^{n-۱} = ۲^n - ۱$$

مثال ۱ :

$$۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳ + ۲^٤ + ۲^٥ + ۲^٦ + ۲^۷ + ۲^۸ = ۲^۹ - ۱ = ٥۱۲ - ۱ = ٥۱۱$$

همین قاعده را **کاشانی** درقاعدهٔ پانزدهم (خواهد آمد) تعمیم داده است .

کاشانی دراینجا به عنوان مثال دوم مسألهٔ تضعیف خانه‌های شطرنج را حل کرده است[۲] .

قاعدهٔ پانزدهم[۳] دستور محاسبهٔ مجموع قوای متوالی یک عدد دلخواه‌است که **کاشانی** آن را به‌صورتهای زیر بیان کرده :

$$\sum_{۱}^{n} a^K = a^۱ + a^۲ + \cdots + a^n = \frac{a \times a^n - a}{a-۱} = \frac{a(a^n - ۱)}{a-۱}$$

$$= \frac{a^n - a}{a-۱} + a^n$$

مثال :

$$٤^۱ + ٤^۲ + \cdots + ٤^٥ = ۱۳٦٤$$

---

۱ ← **مفتاح** ، ص ۱۷۸ : « اذا اردنا ان نجمع الاعداد الحاصله من تضاعیف الواحد و غیره وهذا ایضاً مما استنبطناه » .

۲ — برای کسب اطلاع بیشتر دراین باره رجوع کنید به : **قربانی** ، مسألهٔ شطرنج .

۳ ← **مفتاح**، ص ۱۸۳ : « اذا اردنا جمع المضلعات المتوالية لای عدد کان مع الضلع الاول وهذا مما استنبطناها » .

کاشانی همین دستور را درموردی که عدد a کوچکتر از واحد وبه‌شکل $\frac{p}{q}$ باشد به‌صورت زیر درآورده است :

$$\sum_{۱}^{n}\left(\frac{p}{q}\right)^{K}=\frac{(q^{n}-p^{n})p}{(q-p)q^{n}}$$

مثال :

$$\frac{۳}{٤}+\left(\frac{۳}{٤}\right)^{۲}+\left(\frac{۳}{٤}\right)^{۳}+\left(\frac{۳}{٤}\right)^{٤}=\frac{۳(٤^{٤}-۳^{٤})}{٤^{٤}(٤-۳)}$$

$$=\frac{۳(۲۵٦-۸۱)}{۲۵٦}=۲\,\frac{۳}{۲۵٦}$$

قاعدهٔ شانزدهم(۱) دستور محاسبهٔ a^{m} است وقتی که m عددی بزرگ باشد و نخواهیم قوای متوالی a را حساب کنیم . مثلاً **کاشانی** برای محاسبه $۵^{۸}$ آن را به‌صورت زیر درمی‌آورد :

$$۵^{۸}=[(۵^{۲})^{۲}]^{۲}=[(۲۵)^{۲}]^{۲}=(٦۲۵)^{۲}=۳۹۰٦۲۵$$

و همچنین برای محاسبهٔ $۳^{۱٤}$ می‌نویسد :

$$۳^{۱٤}=۳^{۲+٤+۸}=۳^{۲}\times(۳^{۲})^{۲}\times[(۳^{۲})^{۲}]^{۲}=۹\times۸۱\times٦۵٦۱$$

$$=٤\ ۷۸۲\ ۹٦۹$$

۲۲۳- تبصرهٔ ۱ - برخی قانونهای جالب‌توجه دیگر مربوط به‌محاسبهٔ مجموع سلسله ها نیز درجزو این پنجاه قاعده هست ولی **کاشانی** آنها را از خود نمی‌دانـد و چون هرجا قاعده‌ای از خود یافته به‌صراحت متذکر شده است معلوم است کـه این قاعده‌ها را از دیگران اقتباس کرده است و ازآن جمله است دستورهای زیر :

---

۱ ← **مفتاح** ، ص ۱۸٤ : « اذا اردنا ان‌نحصل‌مضلع عدد یکون عددمنزلته کثیراً من‌غیر ان‌نحصل‌جمیع مضلعاته‌المتوالیة التی‌کانت‌بینها وهذاایضاً مما استنبطناه » .

قاعدهٔ دهم[۱] :

$$\sum_{۱}^{n} K(K+۱)=۱\times۲+۲\times۳+\cdots+n(n+۱)=\frac{۲}{۳}n\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$$

قاعدهٔ یازدهم[۲] :

$$\sum_{۱}^{n} K(K+۱)(K+۲)=۱\times۲\times۳+۲\times۳\times۴+۳\times۴\times۵+\cdots$$
$$+n(n+۱)(n+۲)=\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}\left[\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}-۱\right]$$

که مساوی‌است با $\frac{n(n+۱)(n+۲)(n+۳)}{۳}$

قاعدهٔ دوازدهم[۳] - محاسبهٔ مجموع مربعات اعداد طبیعی از ۱ تا n :

$$\sum_{۱}^{n} K^{۲}=۱+۲^{۲}+۳^{۲}+\cdots+n^{۲}=\frac{۲n+۱}{۳}(۱+۲+\cdots+n)$$

که مساوی است با $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

قاعدهٔ سیزدهم[۴] : محاسبهٔ مجموع مکعبات اعداد طبیعی از ۱ تا n :

---

۱ ← **مفتاح**، ص ۱۸۱ : « اذا اردنا جمع حواصل ضروب کل عدد من الاعداد المتوالیة من الواحد فیما یلیه ... » .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۱۸۲ : اذا اردنا جمع حواصل ضروب کل عدد من الاعداد المتوالیة من الواحد فیما یلیه ثم الحاصل فیما یلیه ... » .

۳ ← **مفتاح**، ص ۱۸۲ : « اذا اردنا جمع مربعات الاعداد المتوالیه من الواحد الی کم شئنا ... » .

۴ ← **مفتاح** ، ص ۱۸۲ : « اذا اردنـا ان نجمع مکعبات الاعداد المتوالیة من الواحد الی کم شئنا نضرب مجموع تلک الاعداد فی نفسه یحصل المطلوب » .

$$\sum_{1}^{n} K^{3}=1^{3}+2^{3}+\cdots+n^{3}=(1+2+3+\cdots+n)^{2}=\left(\sum_{1}^{n} K\right)^{2}$$

که مساوی است با $\frac{n^{2}(n+1)^{2}}{4}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{2}$

قاعدهٔ چهاردهم[۱] ـ محاسبهٔ مجموع قوای چهارم اعداد طبیعی از ۱ تا n [۲].

$$\sum_{1}^{n} K^{4}=\left(\frac{\sum_{1}^{n} K-1}{5}+\sum_{1}^{n} K\right)\sum_{1}^{n} K^{2}$$

یعنی :

$$\sum_{1}^{n} K^{4}=\left\{\frac{1}{5}\left[\frac{n(n+1)}{2}-1\right]+\frac{n(n+1)}{2}\right\}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ابن‌هیثم مصری در حدود چهار قرن قبل از **کاشانی** دستور فوق را به صورت زیر به‌دست آورده بود[۳] :

$$\sum_{1}^{n} K^{4}=\left(\frac{n}{5}+\frac{1}{5}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[(n+1)n-\frac{1}{3}\right]$$

۲۲۴ـ تبصرهٔ ۲ ـ قاعدهٔ پنجاهم دربارهٔ استخراج **عددهای متحاب**[۴] است .

---

۱ ← **مفتاح** ، ص ۱۸۲ : « اذا اردنا جمع اموال الاموال للاعداد المتوالیة من الواحد ننقص من مجموع تلک الاعداد واحداونأخذ خمس الباقی دائماً ونزیده علی مجموع تلک الاعداد فما بلغ نضربه فی مجموع مربعات تلک الاعداد یحصل المطلوب » .

۲ — بعضی از مورخان ریاضی این قاعده را به‌اعتبار اینکه در مفتاح الحساب آمده‌است از کاشانی دانسته‌اند ولی کاشانی خود ادعا نمی‌کند که این قاعده از وی باشد (← **سمیث** H ، ج ۲ ص ۵۰۵) .

۳ ← **یوشکویچ** G : ص ۲۹۳ .

۴ — بعضی از مؤلفان این عددها را « اعداد **متحابه** » نوشته‌اند ولی بیرونی در التفهیم (ص ۳۷) آنها را « عددهای **متحاب** » خوانده است .

کاشانی این اعداد را چنین تعریف می‌کند[1] : عددهای متحاب اعدادی هستند که مجموع اجزای هریک از آنها مساوی باعدد دیگر باشد[2] » و باید دانست که اجزای هرعدد صحیح غیراول اعدادی هستند که آن عدد را می‌شمرند (یعنی آن عدد برآنها قسمت‌پذیر است) و ازآن کوچکترند .

کاشانی پس‌ازذکر قاعدهٔ استخراج‌عددهای‌متحاب که اصل آن از **ثابت‌بن‌قره** است دو عـدد متحاب معروف ۲۲۰ و ۲۸٤ را به دست می‌آورد اما متأسفانـه بعداً اشتباه می‌کند ودوعدد ۲۰۲٤ و ۲۲۹٦ را متحاب‌می‌پندارد وحال‌آنکه این‌دوعدد متحاب نیستند .

برای کسب‌اطلاع بیشتر دربارهٔ عددهای متحاب و قاعدهٔ **ثابت‌بن‌قره** واشتباه کاشانی رجوع کنید به کتاب « دو ریاضیدان‌ایرانی[3] » .

---

۱ ← **مفتاح** ، ص ۱۹۲ : « اذا اردنان ان‌نستخرج‌العددین‌المتحابین و هما عددان‌یکون مجموع اجزاء کل‌واحد منهمامساویاللآخر » .

۲ — درهمهٔ کتابهای ریاضی معتبر به زبانهای فارسی وعربی و فرانسوی و انگلیسی و آلمانی عددهای متحاب به‌همین‌قسم تعریف شده‌اند جز درکتاب « مفاتیح العلوم » خوارزمی (ابوعبدالله محمدبن‌احمدبن‌یوسف) ، چاپ لیدن سال ۱۸۹۰ میلادی ص ۱۸٦ ، که‌درآن آمده است : « العددان‌المتحابان هماالذان اذاجمعت‌اجزاء کل‌واحـدمنهما تساوی مجموعها » یعنی عددهای متحاب دوعددی هستند که هرگاه اجزای هریک‌ازآن دوجمع شود با مجموع آن دوعدد مساوی گردد . البته این درست نیست زیرا مثلاً اعداد ۱۰ و ۲۰ دراین‌تعریف صادق هستند ، چه مجموع اجزای عدد ۱۰ عبارت از ۸ = ۵ + ۲ + ۱ و مجموع اجزای عدد ۲۰ مساوی‌است‌با ۲۲ = ۱۰ + ۵ + ٤ + ۲ + ۱ ومجموع ۸ و ۲۲ مساوی‌باسجموع ۱۰ و ۲۰ است، امادوعدد ۱٤ و ۲۰ متحاب نیستند (پیش‌ازآنکه به‌متن‌عربی‌مفاتیح العلوم خوارزمی رجوع کنم این تعریف را درترجمهٔ فارسی آن کتاب ، توسط آقای خدیو جم ، دیدم وگمان کردم که مترجم را درترجمهٔ آن به فارسی لغزشی رویداده است ولی بعداً معلومم شد که تعریف مذکور درمتن عربی چاپ لیدن به‌همان صورتی است که ذکر شد) .

۳ ← **قربانی** : دو ریاضیدان‌ایرانی ، ص ٤۲ به بعد .

۲۲۵ـ باب چهارم ازمقالهٔ پنجم « مفتاح الحساب » که تقریباً یک پنجم همهٔ آن کتاب را شامل است مشتمل بر ۳۹ مسأله است[۱] که **کاشانی** آنها را با جبر و مقابله یا به وسیلهٔ علم مفتوحات[۲] ویا با قاعدهٔ خطأین حل کرده و خود درابتدای آن گفته‌است که بعضی‌ازآن مسائل را ازکتاب « الفوائدالبهائیه[۳] » اقتباس کرده و آنها را با روشهای گوناگون حل کرده است .

این باب درسه فصل است . فصل اول آن مشتمل بر ۲۵ مسأله است که به معادلات یک مجهولی یا چند مجهولی درجهٔ اول یا دوم و یا به معادلات سیال منجر می‌شود . به عنوان مثال دراینجا مسألهٔ یازدهم این باب را ذکر می‌کنیم :

۲۲۶ـ مسأله ـ می‌خواهیم عدد ۱۰ را به دوقسمت تجزیه کنیم به نحوی که مجموع مربع قسمت اول و خود قسمت دوم یک مربع کامل باشد[۴] .

اگر قسمت اول را x بنامیم ناچار بایدقسمت‌دوم به‌صورت $2xy+y^2$ باشد تا وقتی با x^2 جمع می‌شود مربع کامل شود . دراین‌صورت داریم :

---

۱ ← **مفتاح** ، صفحات ۱۹۴ تا ۲۴۹ ـ کاشانی خود نوشته است که این باب مشتمل بر ۴۰ مسأله‌است ولی درمفتاح الحساب چاپی وهمهٔ نسخه‌های خطی آن کتاب که من دیده‌ام دراین باب ۳۹ مسأله طرح و حل شده که ۲۵ مسأله از آن درفصل اول و ۷ مسأله درفصل دوم و ۷ مسأله درفصل سوم است .

۲ ــ مقصود از**علم‌مفتوحات** حل کردن‌مسائل حساب‌است بدون‌استفاده‌ازمعادلات جبری (← **مفتاح** ، ص ۱۰۴ ، الباب‌الرابع) .

۳ ــ کتاب «الفوائدالبهائیه فی‌القواعدالحسابیه» تألیف‌عمادالدین بغدادی (عبدالله‌بن محمدبن‌عبدالرزاق خوام) یک‌نسخهٔ خطی‌ازاین کتاب درکتابخانهٔ استان‌قدس‌رضوی موجود است (← **فهرست رضوی**، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۴۶ ش ۱۴۵).

۴ ← **مفتاح**، ص ۲۰۵ : « المثال‌الحادی‌عشر ، اردنا ان‌نقسم‌عشرة بقسمین یکون مجموع مربع قسم‌منهمامع نفس‌القسم‌الاخرمربعاً » .

$$x+(۲xy+y^۲)=۱۰ \qquad (۱)$$

و ازآنجا :

$$x=\frac{۱۰-y^۲}{۱+۲y} \qquad (۲)$$

و این یک معادلهٔ سیال است یعنی یک معادله‌است و دو مجهول و بنابراین ممکن است جوابهای متعدد داشته باشد . چون دراین گونه معادلات معمولاً جوابهای صحیح یا منطق مثبت مورد نظر است اگر بخواهیم جوابهای صحیح مثبت را بیابیم با درنظرگرفتن رابطهٔ (۲) باید اولاً $y^۲$ از ۱۰ کوچکتر باشد یعنی y مساوی با ۱ یا ۲ یا ۳ باشد و ثانیاً $۱۰-y^۲$ بر $۱+۲xy$ قسمت‌پذیر باشد . با اندك دقت معلوم‌می‌شود که معادلهٔ (۱) فقط یک‌دستگاه جواب صحیح مثبت‌دارد که عبارتنداز:

$$\begin{cases} x=۳ \\ y=۱ \end{cases}$$

و دراین‌صورت دوقسمت مطلوب عبارتند از :

$$x=۳$$

و :

$$۲xy+y^۲=۷$$

و واضح است که :

$$۳^۲+۷=۱۶=۴^۲$$

اما اگر جوابهای منطق کسری‌را هم بخواهیم کافی‌است که $۱۰-y^۲$ مثبت‌باشد . مثلاً اگر $y=۲$ باشد حاصل می‌شود $x=\frac{۶}{۵}$ ودوقسمت مطلوب عبارتنداز:

و $$\begin{cases} x=\frac{۶}{۵} \\ ۲xy+y^۲=\frac{۴۴}{۵} \end{cases}$$

و واضح است که :

$$\left(\frac{۶}{۵}\right)^{۲} + \frac{۴۴}{۵} = \left(\frac{۱۶}{۵}\right)^{۲}$$

و اگر $y=۳$ باشد نتیجه می‌شود $x=\frac{۱}{۷}$ و دوقسمت مطلوب عبارتند از :

$$\text{و} \quad \begin{cases} x=\frac{۱}{۷} \\ ۲xy+y^{۲}=\frac{۶۹}{۷} \end{cases}$$

و واضح است که :

$$\left(\frac{۱}{۷}\right)^{۲} + \frac{۶۹}{۷} = \left(\frac{۲۲}{۷}\right)^{۲}$$

۲۲۷ـ فصل دوم از باب چهارم[۱] شامل هفت‌مسأله‌است در وصایا. دراین فصل **کاشانی** از **حبوبی** (ابوعلی‌حسن‌بن‌حارث حبوبی‌خوارزمی) نام‌می‌برد[۲] وچند مسأله از مسائل وصایا را با روش او حل می‌کند . این **حبوبی** معاصر با **ابونصر منصوربن‌علی‌بن‌عراق** و **ابوالوفای بوزجانی** و **بیرونی** بوده وکتاب « استقصاء » را دربارهٔ به‌کار بردن جبر و مقابله وخطأین درحساب وصایا نوشته است .

دربخش ششم کتاب حاضر مثالی از مسائل وصایا راکه **کاشانی** درآن کسر اعشاری به‌کار برده است خواهیم آورد[۳] .

۲۲۸ـ فصل سوم از باب چهارم[۴] مشتمل برهفت مسألهٔ هندسی است‌ازقبیل اینکه می‌خواهیم نقطه‌ای در داخل مثلثی که طول اضلاع آن‌معلوم است بیابیم که

---

۱ ← **مفتاح** ، ص ۲۲۸ تا ۲۴۰ .

۲ ← **مفتاح** ، ص ۲۲۹ و ۲۳۳ .

۳ ← ش ۲۹۳ کتاب حاضر .

۴ ← **مفتاح** ، ص ۲۴۰ تا ۲۴۹ .

اگر آن را به سه رأس مثلث وصل کنیم سه مثلث دیگر حاصل شود که مساحت یکی ازآنها نصف مساحت دومی و مساحت دومی ثلث مساحت سومی باشد[۱] .

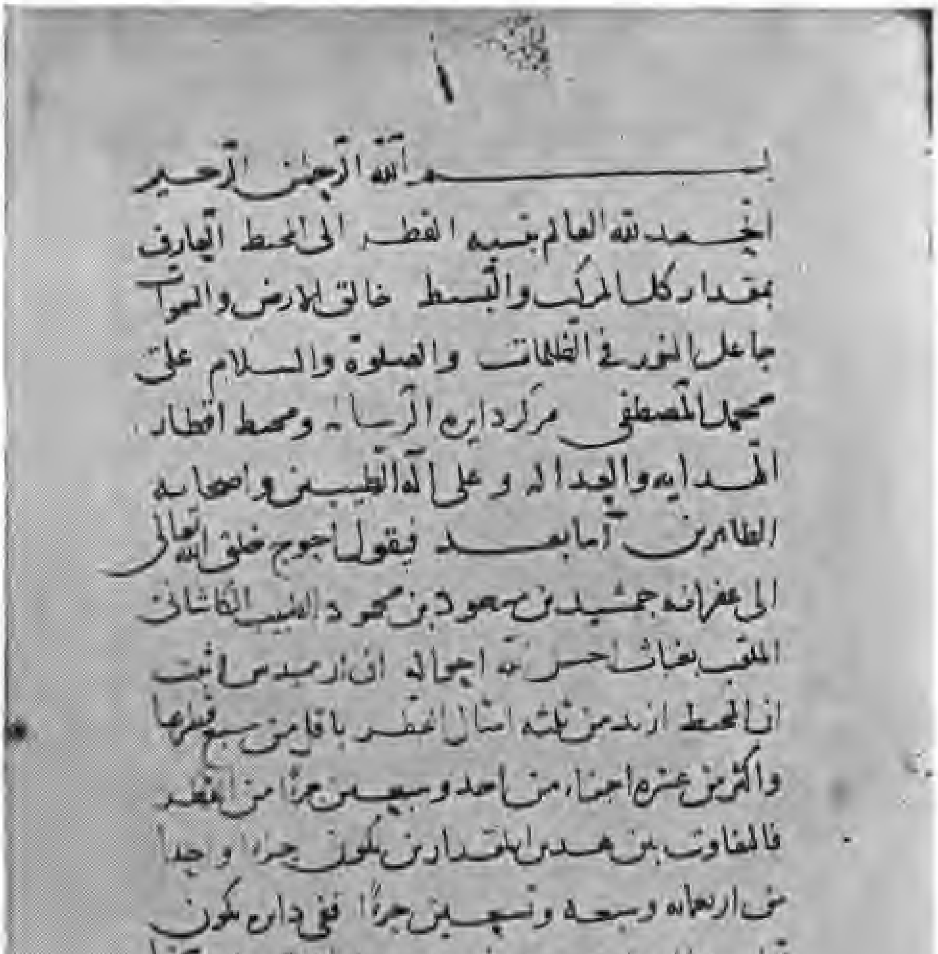
از مطالب جالب این فصل این است که **کاشانی** درضمن حل مسائل پنجم و ششم و هفتم آن ، کسرهای اعشاری را که خود مخترع آنها است عملاً به کار می‌بندد و جوابهای عددی را برحسب کسر اعشاری حساب می کند ، مثالی ازاین نوع را دربخش ششم کتاب حاضر خواهیم آورد[۲] .

۱ ← **مفتاح** ، ص ۲۴۷ : « نریدان نضع فی داخل مثلث نقطة ونصل بینها وبین . . . » .

۲ ← ش ۲۹۴ کتاب حاضر .

صفحهٔ ۱۵۹ ـ عکس برگ اول ازنسخهٔ خطی رسالهٔ محیطیه موجود درمشهد ← ش۲۲۹

صفحهٔ ۲۶۰ـ عکس برگ دوم از نسخهٔ خطی رسالهٔ محیطیهٔ موجود در مشهد (خط شیخ بهائی) ← ش ۲۲۹



بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله العالم بنسبة القطر الى المحيط الجارى
بمقدار كل المركب والبسيط خالق الارض والسموات
جاعل النور في الظلمات والصلوة والسلام على
محمد المصطفى مركز دائرة الرسالة ومحيط اقطار
الهداية والعدالة وعلى آله الطيبين واصحابه
الطاهرين اما بعد فيقول احوج خلق الله تعالى
الى غفرانه جمشيد بن مسعود بن محمود الطبيب الكاشانى
الملقب بغياث احسن الله احواله ان ارشميدس اثبت
ان المحيط ازيد من ثلثة امثال القطر باقل من سبع قطرها
واكثر من عشرة اجزاء من احد وسبعين جزءا من القطر
فالتفاوت بين هذين المقدارين يكون جزءا واحدا
من اربعمائة وسبعة وتسعين جزءا ففى دائرة يكون
قطرها اربعمائة وسبعة وتسعين ذراعا او قصبا او فرسخا
يكون مقدار محيطها مجهولا او مشكوكا فى ذراع واحد
او قصبة او فرسخ ويكون فى اعظم دائرة تقع فى كرة الارض
مجهولا فى خمسة فراسخ لان قطرها خمسة امثال ذلك المقدار
تقريبا وفى منطقة فلك البروج مجهولا فى اكثر من مائة الف
فرسخ وهذا المقدار فاحش فى المحيطات فلم يكن
فى المساحة وذلك لانه استخرج محيط ذى ستة وتسعين
ضلعا فى الدائرة وهو اقل من محيط تلك الدائرة بمن كل ضلع

محيط

صفحهٔ ۱۶۱ - عکس صفحهٔ اول متن رسالهٔ محیطیه ازروی نسخهٔ خطی موجود درمشهد ← ش ۲۲۹

منه اصغر من القوس التي هو وترها لجميع الاضلاع اصغر
من المحيط الذي عليه ومحيط مضلع آخر على الداير شبيها به او
واثبت انه اكثر من محيط تلك الداير بالشكل الاول من المقالة
من كتابه والتفاوت بينهما ما ذكر واما ابو الوفا البوزجاني
فانه حصل وتر نصف جزء من اجزاء ثلثمائه وستين من المحيط
للاجزاء التي بها يكون القطر قك بحساب تقريبي وضربه
في ثلثمائه وعشرين حصل محيط المضلع الذي في الداير واستخرج
محيط المضلع الذي عليها المشابه له وقال اذا كان القطر مائه
وعشرين يكون المحيط ٣٧٦ وكسرا اكثر من ند ند نوث
واقل من ند ند روابع والتفاوت بين الحدين ند
روابع وهو في اعظم داير تقع في الارض يكون قريبا بالف
ذراع ومع ذلك انه غلط في حساب وتر نصف الجزء لانه
اخذه ا ز ا ند ند ند وما هو بصحيح والصحيح
ا ز ا ند ند لو وسنورد تبيينه ابو الريحان
المعروف فانه حصل وتر جزء من ثلثمائه وستين من
المحيط وحصل محيط ذي مايه وثمانين ضلعا في الداير
وبو نط يج ا ومحيط شبيهه عليها ونا ط و
واخذ نصف مجموعهما محيط الداير وجعله الى الاقوم
الحذاق على ان القطر واحد وذلك يعتقد في مثل
اعظم داير تقع في الارض قريبا بفرسخ ومع ذلك غلط
في وتر الجزء لا ند حسبه ا ط ند لو ويبقى

مع تصحیح الارقام

صفحهٔ ۲۶۲ - عکس صفحهٔ دوم متن رسالهٔ محیطیه از روی نسخهٔ خطی موجود در مشهد - ج، ش ۲۲۹

ان يكون ... ط القوس وقد وضع جيب جزء واحد
الذي هو نصف وتر الجزئين في جدول الجيب في قانونه
المسعودي ا ... ط نج وهو صحيح وغلط في ضعف
ولما كانت هذه الاعمال محتملة اردنا ان نستخرج
محيط الدائرة بالاجزاء التي يكون بها القطر معلوما بحيث
يتيقن لنا ان التفاوت عنه وبين ما هو الحق لا يصعد
بشعرة واحدة التي يسدس عرضها شعرات معتدلة في
مثل دائرة يكون قطرها ستمائة الف مثل لقطر
الارض فحررت هذه الرسالة مشتملة على استخراجه
وسميتها المحيطية واوردتها في فصول عشرة مستعينا
بالله العزيز الوهاب وهو الهادي الى طريق الصواب
الفصل الاول في معرفة وتر قوس هي مجموع
القوس المعلومة الوتر ونصف تمامها الى نصف الدور
اقول ان سطح مجموع القطر ووتر كل قوس كانت اقل من نصف المحيط
في نصف القطر يساوي مربع وتر قوس كانت مساوية
لمجموع القوس الاول ونصف تمامها الى نصف الدور ولنبين
نرسم على خط اب نصف دائرة اجب ونسلم وتر اج
لنفرض ... ونصف
تمامها الى نصف الدور
على نقطة د و
نصل اد والاعوج

صفحهٔ ۱۶۳ ـ عکس صفحهٔ سوم متن رسالهٔ محیطیه از روی نسخهٔ خطی موجود در مشهد ← ش ۲۲۹

وما حسبه ابو الريحان في استخراج محيط المضلع ... علم انه غلط ... زايد على ما سعى بتسع عشر ثالثة واربع عشر رابعة مع انه وضع جيب واحد الذي هو وتر الجزئين في الجدول صحيحا وهذا آخر ما اردنا ايراده والحمد لله رب العالمين والعاقبة للمتقين كتبه مؤلفه اصغر عباد الله تعالى جمشيد بن مسعود بن محمود بن محمد الطبيب الكاشي الملقب بغياث احسن الله احواله في اواسط شعبان المعظم سنة ۸۲۷

صفحهٔ ۱۹٤ ـ عکس صفحهٔ آخر متن رسالهٔ محیطیه موجود درمشهد ← ش۲۲۹

بخش چهارم

سیری در رسالهٔ محیطیه

تاریخ تصنیف ونسخه‌های موجود رسالهٔ محیطیه

۲۲۹ـ رسالهٔ محیطیه که بعضی از ریاضیدانان ومورخان مغرب زمین ، چنانکه خواهیم دید ، آن را شاهکار فن محاسبه نامیده‌اند، یکی از مهمترین آثار **کاشانی** است که تصنیف آن را دراواسط ماه شعبان سال ۸۲۷ (ژوییه ۱۴۲۴) به پایان رسانیده است ونسخهٔ گرانقدر آن به خط دست خود **کاشانی** در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی موجود است[۱] . این نسخه مدتی دراختیار **شیخ بهائی** (بهاءالدین محمدبن حسین عاملی) بوده و او در برگ دوم آن نوشته است[۲] : « الرسالة المحیطیه وهی نسخة الاصل بخط مؤلفها المولی الاجل الافضل بطلمیوس زمانه مولانا غیاث الدین جمشید الکاشی طاب ثراه ، حرره الفقیر بهاءالدین محمد العاملی » . بعداً این نسخه را **نادرشاه** وقف کتابخانهٔ آستانهٔ قدس رضوی کرده است[۳] .

درپایان این نسخه آمده است: « کتبه مؤلفه، اصغر عبادالله تعالی ، جمشید بن مسعود بن محمود بن محمد الطبیب الکاشی الملقب بغیاث احسن الله احواله فی اواسط شعبان المعظم سنة ۸۲۷ الهجریة » .

---

۱ ← **فهرست رضوی** ، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۵۲ ش ۱۶۲ .

۲ — عکس این برگ در صفحهٔ ۱۶۰ کتاب حاضر چاپ شده است .

۳ — عکس این نسخه را سرکارخانم عفت مهدوی (آذرین) درحدود ۱۸ سال قبل از مشهد برای نویسنده هدیه آوردند و وظیفهٔ خود می‌دانم که ازاین لطف ایشان در اینجا سپاسگزاری کنم. عکس برگهای اول ودوم وسه صفحهٔ اول وصفحهٔ آخر این نسخهٔ خطی در صفحات ۱۵۹ تا ۱۶۴ کتاب حاضر چاپ شده است .

یک‌نسخهٔ خطی دیگر از «رسالهٔ محیطیه» درکتابخانهٔ مجلس شورای ملی[۱] و نسخه‌های دیگری ازآن‌درخارج‌ازایران موجوداست[۲] ولی‌البته بهترین ومعتبرترین نسخه همان است که به خط دست خود او درمشهد موجود می‌باشد.

ترجمه‌های رسالهٔ محیطیه

۲۳۰ـ رسالهٔ محیطیه را نخستین بار دانشمند خاورشناس آلمانی **پاول‌لوکی** از روی نسخهٔ‌خطی شمارهٔ ۷۰۶ موزهٔ نظامی‌استانبول درسال ۱۹۴۹ میلادی به‌زبان آلمانی ترجمه کرد و شرح بسیار محققانه‌ای دربارهٔ آن نوشت . این ترجمه و شرح به‌ضمیمهٔ قسمت اساسی متن عربی رسالهٔ محیطیه ، متأسفانه بعد از درگذشت **لوکی**، درسال ۱۹۵۳ میلادی دربرلین به‌چاپ رسید[۳] .

لوکی درشرح « رسالهٔ محیطیه » نهایت دقت وموشکافی را به‌کار برده وجز دریکی‌دوسورد بسیار جزئی نکته‌ای را فروگذار نکرده است . به وسیلهٔ انتشارهمین ترجمه وشرح **لوکی** بود که مورخان و ریاضیدانان‌مغرب زمین‌متوجه اهمیت و ارزش آثار **کاشانی** شدند و همهٔ ما ایرانیان بایدازآن دانشمند فقید سپاسگزار باشیم . همین ترجمه بعداً اساس ترجمهٔ روسی رسالهٔ محیطیه (شرحش خواهد آمد) واقع شد .

۲۳۱ـ لوکی درمقدمهٔ این ترجمه می‌نویسد[۴] :

« رسالـهٔ محیطیه **کاشانی** شاهکاری درفن محاسبهٔ شصتگانی است . **کاشانی** درآغاز این رساله با بیانی فصحیح و روشن از **ارشمیدس** و از رسالـه‌ای کـه دربارهٔ محاسبهٔ (محیط) دایره به **ابوالوفای (بوزجانی)** منسوب است وهمچنین از **بیرونی**

---

۱ ← **فهرست مجلس**، ج ۲ ص ۴۰۹ ش ۶۴۲/۲ .

۲ ← **لوکی** L ، ص ۳۵ وشمارهٔ ۲۳۰ کتاب حاضر .

۳ ← **لوکی** L .

۴ ← **لوکی** L ، ص VII .

(ابوریحان) گفتگو می کند و سپس به محاسباتی که نظم و ترتیب درآن مراعات شده وماهرانه مدون گردیده می‌پردازد ودرطی‌این‌محاسبات به کمک‌دو کثیرالاضلاع منتظم محاطی و محیطی که عدهٔ اضلاع هریک از آنها $۳ \times (۲)^{۲۸}$ است[۱] نسبت محیط دایره را به قطر آن بسیار دقیقتر از آنچه پیشقدمان وی می‌دانسته‌اند به دست می‌آورد. ازسبک **کاشانی** درحساب شصتگانی و وارسی و کنترلی که دربارهٔ عملیات به کار می‌بندد و نوعی که خطاهای وارد درمحاسبات را تخمین می‌زند می‌توان به آنچه درقلمرو علم حساب (تا زمان وی) حاصل شده بود و نقایصی که هنوز وجود داشت پی‌برد » .

« **کاشانی** مقدارتقریبی دو پی « ۲π » را دردستگاه شصتگانی مساوی با[۲] » .

٦ ؛ ١٦ , ٥٩ , ٢٨ , ١ , ٣٤ , ٥١ , ٤٦ , ١٤ , ٥٠

بدست آورد که همهٔ ارقام شصتگانی‌آن درست است. **کاشانی** می‌خواست که کسانی که درآن عصر منجم نبودند و با حساب شصتگانی آشنایی نداشتند بتوانند از مقدار عدد π استفاده کنند وموفق شدکه نتیجهٔ محاسبات‌خود را به کسرهای اعشاری که اختراع نوینی (توسط **کاشانی**) بود تبدیل کنند» .

« **کاشانی** تعلیم می‌دهدکه چگونه با در دست داشتن مقدار :

$$۲\pi = ٦٫٢٨٣\ ١٨٥\ ٣٠٧\ ١٧٩\ ٥٨٦\ ٥$$

و به فرض معلوم‌بودن قطر دایره می‌توان محیط آن‌را حساب کرد و برعکس بامعلوم بودن محیط دایره می‌توان قطر آن را به دست آورد و به این ترتیب **کاشانی** نشان می‌دهد، که تاآنجا که‌مااطلاع داریم،وی‌نخستین کسی‌است که کسرهای اعشاری‌را اختراع کرده وطرز نوشتن آنها و روش عملی محاسبه با آنها را تعلیم داده است » (پایان نوشتهٔ **لوکی**) .

---

۱ — $۳ \times (۲)^{۲۸} = ۸۰۵\ ۳۰٦\ ۳٦۸$.

۲ — دربارهٔ نوشتن‌اعداد دردستگاه شصتگانی دراین کتاب‌رجوع کنید به شمارهٔ ۱۷۸

۲۳۲ـ درسال ۱۹۰٦ میلادی **رزنفلد و یوشکویچ** متن عربی رسالهٔ محیطیه و ترجمه و شرح آن را به زبان روسی منتشر کردند[۱] . نسخهٔ خطی رسالهٔ محیطیه که مورداستفادهٔ آنان بوده است دربسیاری از مواضع مغلوط است که البته عده‌ای ازآن غلطها را تصحیح کرده‌اند .

نویسندهٔ کتاب‌حاضر نیز رسالهٔ محیطیه را ازروی نسخهٔ اصل به‌زبانهای فارسی و فرانسوی ترجمه و شرح کرده و انشاءالله آن را درآینده به‌چاپ خواهد رسانید .

فصلهای رسالهٔ محیطیه

۲۳۳ـ رسالهٔ محیطیه دارای مقدمه و ده فصل وخاتمه است به شرح زیر :

مقدمه (ترجمهٔ فارسی آن خواهد آمد ← ص ۱۷۰) .

فصل اول درتعیین وتر مجموع دوقوس که‌اولی وترش معلوم ودومی‌مساوی با نصف تمام (= مکمل) اولی تا نیمدایره باشد[۲] .

فصل دوم درتعیین محیط کثیرالاضلاع محاطی دلخواه و محیط کثیرالاضلاع محیطی مشابه با آن[۳] .

فصل سوم دراینکه محیط (دایره) را به‌چندضلع (= جزو متساوی) تقسیم کنیم وعمل را تاچه مرتبه (شصتگانی) ادامه دهیم تا آنکه (طول) محیط قسمی برای ما حاصل شود که در دایرهٔ مذکور (تفاوت) به‌مویی نرسد[٤] .

---

۱ ← **رزنفیلد و یوشکویچ** ، ص ۲٦۵ تا ۳۰۷ (ترجمهٔ روسی) و ص ۳٦۷ تا ۳۷۵ (شرح و حواشی) و ص ۳۳۸ تا ٤۲٤ (متن عربی) .

۲ — فی‌معرفة وترقوس هی‌مجموع القوس‌المعلومةالوترونصف تمامها الی‌نصف‌الدور .

۳ — فی‌معرفة محیطای‌مضلع یکون فی‌الدائره ومحیط‌المضلع الذی‌علیها المشابه‌له .

٤ — فی‌انـانقسم‌المحیط بکم‌ضلعا و نستقصی‌فی‌العمل الی‌ایـه مرتبةلیحصل‌لناالمحیط بحیث‌لا یعتدبشعره‌فی‌مثل‌الدائرة‌المذکوره .

فصل چهارم دراعمال .

فصل پنجم دراستخراج (طول) یک ضلع ازکثیرالاضلاع (منتظم) محاط در دایره که عدهٔ اضلاع آن ۱،۲،۸،۱۶،۳۲،۴۸ باشد[۱] .

فصل ششم دراستخراج محیط کثیرالاضلاع (منتظم) محاط در دایره و (محیط) کثیرالاضلاع مشابه با آن ومحیط بردایره که عدهٔ اضلاع هریک ۸۰۵ ۳۰۶ ۳۶۸ باشد[۲] .

فصل هفتم درآنچه ازفرو گذاشتن کسرهای زاید یا باقی (ناقص) درآخرین رقمهای اعمال پیش حاصل می‌شود[۳] .

فصل هشتم درتبدیل اندازهٔ محیط (دایره) به ارقام هندی به فرض آنکه شعاع دایره معلوم باشد[۴] .

فصل نهم درچگونگی اعمال با دوجدول .

فصل دهم درشناختن تفاوت بین آنچه نزد ریاضیدانان مشهور و مستعمل است و آنچه ما به‌دست آورده‌ایم[۵] .

خاتمه دراثبات غلط ابوالوفا و ابوریحان[۶] .

---

۱ — فی استخراج ضلع واحد من المضلع الذی یکون اضلاعه فی الدائره **ا ب ح یو یب مح** (این عدد در دستگاه شصتگانی نوشته شده است ← ش ۱۷۸ کتاب حاضر) .

۲ — فی استخراج محیط المضلع الذی فی الدایره والذی علیها المتشابهان اللذان یکون عدد اضلاع کل واحد منهما ۱۶۸ ۳۳۵ ۸۰۰ (این عدد درمتن محیطیه اشتباهاً چنین نوشته شده و صحیح آن همان است که درفوق نوشتیم) .

۳ — فی ما یعتدمن اهمال الکسورالزایده اوالباقیه فی آخر مراتب الاعمال السابقة .

۴ — فی تحویل المحیط الی الرقوم الهندیة .

۵ — فی معرفة التفاوت بین ما هوالمشهور والمستعمل عندالقوم وبین ماحصلناه .

۶ — فی اثبات غلط ابی الوفاء وابی الریحان .

ترجمهٔ فارسی مقدمهٔ «رسالهٔ محیطیه»

این مقدمه را از روی نسخهٔ اصل متن عربی «رسالهٔ محیطیه» به فارسی برگردانده‌ام و اعداد را در دستگاه شصتگانی مطابق با قرارداد شمارهٔ ۱۷۸ کتاب حاضر (از چپ به راست) نوشته‌ام و برای سهولت ارجاع مقدمه را به چهار جزء تقسیم کرده و در آغاز هرجزء یک شماره قرارداده‌ام.

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

۲۳۴ـ ستایش خداوندی را سزد که از نسبت قطر به محیط آگاه است[۱] و اندازه هرمرکب و بسیط را می‌شناسد و آفرینندهٔ زمین و آسمانها و قرار دهندهٔ نور درتاریکی است. و درود و سلام بر محمد مصطفی که مرکز دایرهٔ رسالت و محیط اقطار رهنمایی و دادگری است و برخاندان و یاران پاک او باد[۲]».

«اما بعد نیازمندترین بندگان خدای تعالی به‌آمرزش وی **جمشید پسرمسعود پسر محمود**، طبیب کاشانی ملقب به **غیاث** که خداوند احوال او را نیکو گرداند می‌گوید: **ارشمیدس** ثابت کرده‌است که محیط (دایره) از سه برابر قطرش به‌اندازهٔ کمتراز $\frac{۱}{۷}$ و بیشتر از $\frac{۱۰}{۷۱}$ قطر، بزرگتراست[۳]. پس تفاوت بین این دومقدار

۱ــ اشارهٔ لطیفی است به‌اصم بودن نسبت قطر دایره به محیط آن $\left(\frac{۱}{\pi}\right)$. **کاشانی** درمفتاح‌الحساب (ص ۱۰۷) پس از تعیین مقدار تقریبی نسبت محیط دایره به قطر (عدد π) دربارهٔ آن‌نسبت می‌نویسد: «لکنه بالحقیقة‌لایعرفه‌الاالله تبارك و تعالی» یعنی هیچکس‌جز خداوند مقدار حقیقی عدد پی را نمی‌داند.

۲ــ الحمدالله‌العالم بنسبة‌القطر الی‌المحیط. العارف بمقدارکل‌المرکب‌والبسیط. خالق‌الارض‌والسموات، جاعل‌النور فی‌الظلمات‌والصلوة‌والسلام‌علی محمدالمصطفی مرکز دایرة‌الرساله‌ومحیط‌اقطارالهدایة والعدالة‌وعلی‌آله‌الطیبین‌واصحابه‌الطاهرین» (← ص ۱۶۱).

۳ــ یعنی نسبت محیط هردایره به قطرش کمتر از $۳ \frac{۱}{۷}$ و بیشتر از $۳ \frac{۱۰}{۷۱}$ است (← **هیث**، آثار ارشمیدس: ص ۹۳).

$\frac{۱}{۴۹۷}$ (قطر) است. پس دایره‌ای که قطرش ۴۹۷ ذراع یا قصب[۱] یا فرسنگ باشد مقدار محیطش درحدود یک ذراع یا قصب یا فرسنگ مجهول ومشکوک است و دایرهٔ عظیمه‌ای که بر کرهٔ زمین واقع باشد محیطش در حدود پنج فرسنگ مجهول است زیرا قطر آن برحسب فرسنگ تقریباً پنج برابر مقدار مذکور می‌باشد[۲] و در فلک‌البروج (محیط) درحدود بسیار بیش از صد هزار فرسنگ مجهول است[۳] . و این مقادیر که در محیطها (این اندازه) زیاد هستند درمساحت (ها) چه خواهند بود[۴] ؟ این به علت آن است که وی (= ارشمیدس) محیط ۹۶ ضلعی (منتظم) محاط در دایره را استخراج کرده است و آن از محیط دایره کوچکتر می‌باشد زیرا هر ضلع آن از قوس روبروی آن کوچکتراست ومجموع اضلاع آن ازمحیط دایره کوچکتر می‌باشد و (ارشمیدس) محیط چند ضلعی دیگری را که مشابه با اولی و محیط بر (همان) دایره است استخراج کرده و به مدد قضیهٔ اول نخستین مقالهٔ کتاب خود به ثبوت رسانیده است که آن از محیط دایرهٔ مذکور بزرگتر است و تفاوت بین آنها

---

۱ — قصب، وبه‌عربی‌قصبه، واحدی بوده‌است که درمساحی به کارمی‌برده‌اند وظاهراً آن‌را به‌فارسی«باب»می‌گفته‌اند (← **دایرةالمعارف اسلام**، چاپ‌جدید، مقالهٔ«ذراع»).

۲ — بنابراین **کاشانی** قطرکرهٔ زمین را تقریباً ۲۴۸۵ = ۴۹۷ × ۵ فرسنگ محسوب داشته است.

۳ — بنابراین **کاشانی** قطرفلک‌البروج رابیش‌از ۴۹ ۷۰۰ ۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰ × ۴۹۷ فرسخ گرفته است . **بیرونی** در **التفهیم** (ص ۱۵۹) قطر فلک‌البروج را ۴۴ ۹۶۰ ۰۰۵ فرسنگ و چهار دانگ نوشته است .

۴ — مقصود این‌است که وقتی‌درطول (محیط) که یک بعد دارد این‌اندازه اختلاف حاصل‌می‌شود البته دراندازهٔ سطحها وحجمها که‌دارای دو و سه بعدهستند اختلاف‌فوق‌العاده زیاد خواهد بود .

(= درمحیط) همان است که گفته شد[۱] » .

۲۳۵- « و اما **ابوالوفای بوزجانی** وتر نصف $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط‌دایره (= وترقوس نیم‌درجه) را به فرض آنکه قطر دایره ۱۲۰ باشد به حساب تقریبی به دست آورده و آن را در ۷۲۰ ضرب کرده تا محیط ۷۲۰ ضلعی (منتظم) محاط دردایره حاصل شود و (نیز) محیط ۷۲۰ ضلعی محیطی مشابه با اولی را استخراج کرده و گفته است که اگر قطر ۱۲۰ باشد محیط آن ۳۷۶ وکسری می‌شود و این کسراز (۰;۵۹,۱۰,۵۹) بیشتر[۲] واز (۰;۵۹,۲۳,۰۴,۱۲) کمتراست‌وتفاوت‌بین‌این دومقدار (۰;۰,۱۲,۰۰,۱۲) می‌باشد. واین (تفاوت) دردایرهٔ‌عظیمه‌ای که بر کرهٔ‌زمین‌واقع‌باشد‌تقریباً به هزارذراع بالغ می‌شود. با این حال او (= بوزجانی) درمقدار وتر (قوس) نیم درجه اشتباه

---

۱ — برای کسب اطلاع از کارهای **ارشمیدس** دربارهٔ اندازه‌گیری نسبت محیط دایره به قطر آن به یکی ازمنابع زیر رجوع کنید :

هیث ، آثار ارشمیدس : ص ۹۱ تا ۹۸ - تحریر مقالهٔ « تکسیر دایرهٔ ارشمیدس » توسط **خواجه نصیرالدین طوسی** که به‌ضمیمهٔ « تحریرالکرة‌والاسطوانه » درجزو‌رسائل **طوسی** درحیدرآباد چاپ شده است (صفحات ۱۲۷ تا ۱۳۳ - بیشتر ارقام درآنجا غلط چاپ شده‌است) - تحریرکتاب «معرفةمساحةالاشکال» **بنوموسی** توسط **طوسی** چاپ حیدرآباد، صفحات ۶ تا ۹ .

۲ — همهٔ کسرهایی که دراین بخش کتاب بین پرانتزها گذاشته شده در دستگاه شصتگانی (ازچپ به راست) نوشته شده است . قرارداد چگونگی نوشتن این کسرها را در شمارهٔ ۱۷۸ شرح داده‌ایم و باز به عنوان مثال توضیح می‌دهیم که :

$$(0\,;\,۰۹\,,\,۱۰\,,\,۰۹) = \frac{۰۹}{(۶۰)} + \frac{۱۰}{(۶۰)^{۲}} + \frac{۰۹}{(۶۰)^{۳}} = \text{(ثالثه) نط ی نط}$$

$$(0\,;\,۰۹\,,\,۲۳\,,\,۰۴\,,\,۱۲) = \frac{۰۹}{(۶۰)} + \frac{۲۳}{(۶۰)^{۲}} + \frac{۰۴}{(۶۰)^{۳}} + \frac{۱۲}{(۶۰)^{۴}} =$$

نط کج ند یب (رابعه)

کرده است ، زیرا او این (وتر) را

(o ; ۳۱ , ۲٤ , ٥٥ , ٥٤ , ٥٥)

گرفته و این درست نیست وصحیح آن چنین است :

(o ; ۳۱ , ۲٤ , ٥٦ , ٥٨ , ٤٦)

و دلیل این را بعداً خواهیم گفت[۱] .

۲۳٦ـ « و اما **ابوریحان بیرونی** وتر دوجزء از ۳٦۰ قسمت محیط (= وتر قوس دو درجه) را حساب کرده و محیط ۱۸۰ ضلعی (منتظم) محاطی را مساوی با :

(٦ ; ۱٦ , ٥۹ , ۱۰ , ٤۸ , o)

و محیط ۱۸۰ ضلعی (منتظم) محیطی مشابه با آن را مساوی با :

(٦ ; ۱۷ , ۱ , ٥۸ , ۱۹ , ٦)

حساب کرده ونصف مجموع این دو را محیط دایره گرفته است و آن را به فرض آنکه قطر دایره[۲] واحد باشد با ارقام هندی به کسری که مخرج آن چند رقمی‌است تبدیل کرده است. و این در دایره‌ای که مساوی بادایرهٔ عظیمهٔ واقع بر کرهٔ زمین باشد تقریباً به یک فرسنگ می‌رسد . با این‌حال وی (= بیرونی) در وتر (قوس) دو درجه اشتباه کرده است زیرا او این وتر را :

(o ; ۲ , ٥ , ۳۹ , ٤۳ , ۳٦)

گرفته درصورتی که باید آن را :

(o ; ۲ , ٥ , ۳۹ , ۲٦ , ۲۲)

---

۱ — برای شرح ونقادی آنچه **کاشانی** دراین مقدمه دربارهٔ **بوزجانی** نوشته است رجوع کنید به شمارهٔ ۲۳۸ کتاب حاضر .

۲ — درمتن چنین است ولی ظاهراً باید نیم قطر یعنی شعاع دایره باشد زیرا چنانکه خواهیم دید (ش ۲۳۹) بیرونی قطر را ۲ گرفته است.

گرفته باشد. وباید دانست که او (= بیرونی) جیب قوس یک درجه را که نصف وترقوس دو درجه است درجدول جیب (کتاب) قانون مسعودی خود :

(٤٣ , ٤٩ , ٢ , ١ ; ٥)

ثبت کرده و این درست است اما دو برابر آن را غلط حساب کرده است[۱] » .

۲۳۷ـ « چون این اعمال (= محاسبات) مختل بود خواستیم محیط دایره را به فرض معلوم بودن قطر آن برحسب واحدمعینی چنان استخراج کنیم که برما یقین حاصل شود که در دایره‌ای که قطرش ششصد هزار برابر قطر زمین باشد تفاوت بین نتیجهٔ حساب ما وآنچه حق‌است (= مقدار واقعی محیط) به یک مو نرسد ، مویی که ضخامتش یک ششم عرض یک دانه جو متوسط است ، و آنچه کوچکتر از آن (= تفاوتی که کمتر از یک‌مو) باشد قابل اهمیت نیست. واین رساله را مشتمل براستخراج محیط در ده فصل ویک خاتمه نوشتم وآن را **محیطیه** نامیدم درحالی که از خداوند عزیز وهاب یاری‌می‌طلبم واوست هدایت کنندهٔ به راه راست » (پایان).

شرح ونقادی مقدمهٔ رسالهٔ محیطیه

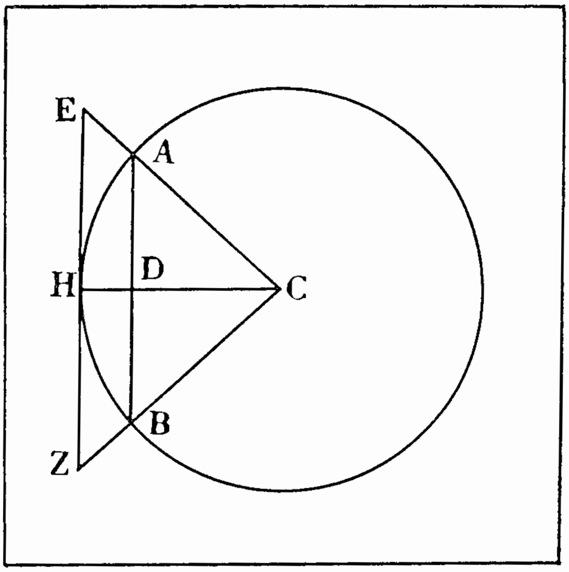
۲۳۸ـ دربارهٔ بوزجانیـ معلوم نیست که محاسباتی را که **کاشانی** به **بوزجانی** نسبت‌داده (← ش ۲۳۰) ازکدامیک ازآثاراواستخراج کرده‌است. به‌احتمال بسیار قوی این قول **کاشانی** مبتنی برعباراتی از تحریر مقالهٔ « تکسیرالدائرة » **ارشمیدس** توسط **خواجه نصیرالدین طوسی** است . **خواجهٔ طوسی** درتحریر مقالهٔ مذکور در پایان شکل دوم می‌نویسد[۲] : « منجمان روش دیگری (برای محاسبهٔ نسبت محیط

---

۱ — برای شرح و نقادی آنچه **کاشانی** در این مقدمه دربارهٔ **بیرونی** نوشته است رجوع کنید به شمارهٔ ۲۳۹ کتاب حاضر .

۲ ← تحریر مقاله «تکسیرالدائرة» ارشمیدس توسط **خواجه‌نصیرالدین طوسی** درپایان « کتاب الکرة والاسطوانه » جزو « الرسائل‌التسع » **طوسی** ، چاپ حیدرآباد ، ص ۱۳۱ : « اقول وللمنجمین طریق آخروهوانهم یحصلون وترقوس صغیرة یکون جزءاً من محیط . . . » .

دایره به قطر آن) دارند وآن این‌است که وتر قوس کوچکی ازمحیط دایره را برطبق اصولی که در کتاب مجسطی و کتابهای نجومی برهانی دیگر آمده است استخراج می‌کنند و آن وتر را ضلعی از کثیرالاضلاع (منتظم) محاط در دایره می‌گیرند و با استفاده از اینکه، نسبت این‌ضلع به عمودی که ازمرکز دایره برآن فرودآید مساوی است با نسبت ضلع کثیرالاضلاع محیط بردایره (و مشابه با کثیرالاضلاع مذکور) به شعاع دایره، طول این ضلع را نیز حساب می‌کنند و از روی مقادیر حاصل دو مقدار به دست می‌آورند به قسمی که محیط دایره از یکی ازآن دو مقدار بزرگتر و از دیگری کوچکتر است و ازاین رو محیط دایره را با تقریب زیاد استخراج می‌کنند».



« مثلاً فرض کنیم که C مرکز دایره و قوس AB مساوی با $\frac{1}{720}$ محیط آن دایره باشد و وتر AB را وصل کنیم. مقدار وتر AB مطابق باحساب **ابوالوفای بوزجانی** براساس اصول مذکور مساوی است با :

(۰;۳۱,۲٤,۵۵,۵٤,۵۵)

و اگر قطر (دایره) را ۱۲۰ جزء بگیریم این اندازهٔ وتر قوس نیم درجه است. اگر

این وتر را ضلع ۷۲ ضلعی(منتظم) محاط در دایره بگیریم محیط این کثیرالاضلاع مساوی خواهد بود با[۱] :

(۳۷٦ ; ۵۹ , ۱۰ , ۵۹)

و اگر وتر نیم درجه را نصف کنیم ... » (پایان) .

ملاحظه می‌شود که به احتمال قوی **کاشانی** درانتقادی که از **بوزجانی** کرده به همین نوشته نظر داشته‌است . اما **ویکه** ثابت کرده است[۲] که عددی که **خواجه نصیر طوسی** از قول **بوزجانی** آن را مساوی با وتر AB گرفته است در واقع جیب نیم درجه است (و نه وتر نیم درجه) که بوزجانی در « **مجسطی** » خود آن را به دست آورده و بنابراین اشتباهی که **کاشانی** به **بوزجانی** نسبت‌می‌دهد درست‌نیست . **ویکه** می‌نویسد : « می‌توان فرض کرد که محرر رساله (= طوسی) فقط خواسته که مثالی از محاسبهٔ عددی برای روش منجمان درمورد محاسبهٔ تقریبی محیط دایره آورده باشد و در ذکر این مثال نه به صحت عددی که آورده توجه داشته و نه به دقت نتیجهٔ حاصل ازآن » .

۲۳۹ـ دربارهٔ بیرونی ـ آنچه **کاشانی** دربارهٔ‌محاسبهٔ محیط‌دایره توسط **بیرونی** نوشته است مربوط به باب پنجم از مقالهٔ سوم کتاب « قانون مسعودی » است و ما برای مزید فایده همهٔ آن باب‌را دراینجا می‌آوریم . **بیرونی** دراین‌باب می‌نویسد[۳]:

۱ — توجه کنید که قسمت صحیح این عدد در دستگاه دهگانی و قسمت کسری آن در دستگاه شصتگانی نوشته شده‌است (← شمارهٔ ۱۷۹ کتاب حاضر) قدما این‌عدد را چنین می‌نوشتند : ۳۷٦ (نط ی نط) .

۲ ← **ویکه** R : ص ۳۰۳ ـ و نیز ← **لوکی** L : ص ٤۳ به بعد .

۳ ← **قانون مسعودی** : ج ۱ صفحات ۳۰۳ و ۳۰٤ (این فصل ازکتاب قانون مسعودی و مخصوصاً اعداد آن بسیار غلط چاپ شده است ـ این اعداد را با استفاده از منابع دیگر تصحیح کرده‌ام (← **شوی** T : ص ۳۱ به‌بعد) مطالبی راکه از«قانون‌مسعودی» اخذ کرده‌ام با استفاده ازعلائم و اصطلاحات کنونی طوری به فارسی برگردانده‌ام که آسانتر قابل استفاده باشد) .

« محیط دایره را به ۳٦۰ جزء وهریک ازاین اجزا را به‌واحدهای شصتگانی تقسیم کرده‌اند و اصل این مطلب ناشی از این است که عدد ۳٦۰ واسطهٔ عددی بین عدهٔ روزهای سال شمسی و عدهٔ روزهای سال قمری است[۱] ، بدون‌آنکه این امر (= تقسیم دایره به ۳٦۰ جزء) اضطراری باشد . ومحیط دایره به قطر آن دارای نسبتی است پس همچنین اندازهٔ محیط هم به اندازهٔ قطر نسبتی دارد اگر چه این نسبت اصم است » .

« برای دانستن این نسبت به وجه تقریبی دایره‌ای به قطر AC و به مرکز H رسم می کنیم واز نقطهٔ A عمود AT را برقطر AC اخراج می کنیم و H را به Z وصل می کنیم[۲] و امتداد می‌دهیم تاعمود مرسوم را درنقطهٔ T قطع کند. چون ZS (یعنی عمود مرسوم از نقطهٔ Z بر AC) نصف ضلع صدوهشتاد ضلعی (منتظم محاط دردایره) یعنی نصف‌وتر روبروی‌قوس دودرجه است می‌دانیم که[۳] :

$$\text{۲}ZS=(\text{٥};\text{۲},\text{٥},\text{۳۹},\text{٤۳},\text{۳٦})$$

---

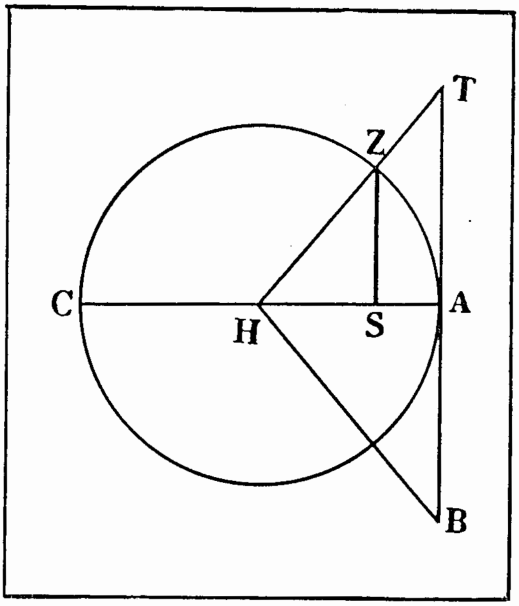
۱ — این دلیل که **بیرونی** برای‌تقسیم‌دایره به ۳٦۰ درجه می‌آوردجالب‌توجه‌است ولی فرضی بیش نیست .

۲ — درمتن عربی قانون‌مسعودی انتخاب نقطهٔ Z روی دایره بیان نشده است ولی‌از مطالب بعدی معلوم می‌شود که **بیرونی** زاویهٔ AHZ را مساوی با یک درجه اختیار کرده است.

۳ — معلوم نیست چرا **بیرونی** دراینجا برای وتر روبروی قوس دو درجه مقداری اختیارکرده که از مقدار واقعی آن بزرگتر است . و این همان انتقادی است که **کاشانی** کرده‌است (← ش۲۳٦) بیرونی‌جیب‌قوس یک‌درجه راکه نصف‌وتر روبروی قوس‌دودرجه است درجدول جیوب « قانون مسعودی » (ج ۱ ص ۳۰۸) صحیح نوشته است وآن مساوی است با (٤۳ , ٤۹ , ۲ , ۱ ; ٥) که دو برابرش‌می‌شود (۲٦ , ۳۹ , ٥ , ۲ ; ٥) واگراین عدد را صحیح اختیارکرده بود نتیجهٔ محاسباتش دقیقتر می‌شد.

و از این‌رو مجموع اضلاع صدوهشتاد ضلعی (منتظم) محاطی مساوی است با :

(۶;۱۶,۵۹,۱۰,۴۸)



و اگر قطر دایره را ۲ بگیریم داریم :

$$\frac{\text{قطر}}{(۶;۱۶,۵۹,۱۰,۴۸)} = \frac{۱}{(۳;۸,۲۹,۳۵,۲۴)} \qquad (۱)$$

و محیط دایره ازمجموع اضلاع این‌صدوهشتاد ضلعی (منتظم) محاطی بزرگتراست.

پس :

$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} < \frac{۱}{(۳;۸,۲۹,۳۵,۲۴)}$$

و چون داریم :

$$\frac{ZS}{SH} = \frac{TA}{AH}$$

پس نتیجه می‌شود[۱] :

$$TA=(o;۱,۲,۵۰,۱۹,۴۳)$$

وبنابراین :

$$BT=۲AT=(o;۲,۵,۴۰,۳۹,۲۶)$$

و این BT ضلع صدوهشتاد ضلعی (منتظم) محیطی است که مجموع اضلاع آن مساوی است با :

$$(۶;۱۷,۱,۵۸,۱۹)$$

پس :

$$\frac{\text{قطر}}{\text{مجموع اضلاع ۱۸۰ ضلعی محیطی}}=\frac{۱}{(۳;۸,۳۰,۵۹,۱۰)} \qquad (۲)$$

و محیط دایره از مجموع اضلاع این صدوهشتاد ضلعی (منتظم) محیطی کوچکتر است . پس :

$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}}>\frac{۱}{(۳;۸,۳۰,۵۹,۱۰)}$$

بنابرآنچه گذشت نتیجه می‌شود :

$$\frac{۱}{(۳;۸,۲۹,۳۵,۲۴)}>\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}}>\frac{۱}{(۳;۸,۳۰,۵۹,۱۰)}$$

بنابراین محیط دایره بین دومقدار (۳;۸,۲۹,۳۵,۲۴) و (۳;۸,۳۰,۵۹,۱۰)

---

۱ — درمتن « قانون مسعودی » (ج ۱ ، ص ۳۰۴) به جای مقدار AT به غلط (o;۱,۲,۴۹,۴۳,۱۱) که **جیب** یک درجه است نوشته شده درصورتی که TA **ظل** یک درجه است و مقدار آن چنانکه از دو برابرش (یعنی مقدار BT) معلوم می‌شود باید (o;۱,۲,۵۰,۱۹,۴۳) باشد که ما درترجمه نوشتیم . با وجوداین ، این مقدار هم ازمقدار واقعی ظل یک درجه بیشتر است . **بیرونی** خود درجدول اظلال « قانون مسعودی » (ج ۱ ص ۳۴۱) مقدار ظل یک درجه را (o;۱,۲,۵۰,۱۷) نوشته است ولی دراینجا دو برابر آن را بیش از مقداری که خود به دست آورده محسوب داشته است .

محصور است که تفاوتشان فقط یک ثانیه و $\frac{۲}{۵}$ ثانیه است. وبهتر است که همانگونه که **بطلمیوس** درمقالهٔ ششم «مجسطی» عمل کرده است نصف مجموع (واسطهٔ عددی) آنها را بگیریم تا نسبت قطر به محیط مساوی شود با:

$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} = \frac{۱}{(۳;۸,۳۰,۱۷,۱۶,۴۶,۳۰)} \qquad (۳)$$

کسور شصتگانی مخرج سمت راست تساوی (۳) از $\frac{۱}{۷}$ کوچکتر است و تفاضل آن با $\frac{۱}{۷}$ تقریباً $\frac{۱}{۱۲۹}$ کسر $\frac{۱}{۷}$ است[1].

---

۱ — اگر کسرهای شصتگانی مخرج طرف راست تساوی (۳) را α بنامیم:

$$(\alpha = 0;۸,۳۰,۱۷,۱۶,۴۶,۳۰)$$

ابوریحان می‌گوید:

$$\frac{۱}{۷} - \alpha = \frac{۱}{۱۲۹} \times \frac{۱}{۷}$$

و این کاملاً درست است زیرا اگر α را برحسب کسر اعشاری حساب کنیم حاصل میشود:

$$\alpha \approx ۰٫۱۴۱۷۴۶$$

اما:

$$\frac{۱}{۷} \approx ۰٫۱۴۲۸۵۷$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{۷} - \alpha = ۰٫۰۰۱۱۱۱$$

پس:

$$\alpha < \frac{۱}{۷}$$

اما:

$$\frac{۱}{۱۲۹} \times \frac{۱}{۷} \approx ۰٫۰۰۱۱۰$$

و واضح می‌شود که:

$$\frac{۱}{۷} - \alpha = \frac{۱}{۱۲۹} \times \frac{۱}{۷}$$

رابطهٔ (۳) را می‌توان چنین نوشت[1] :

$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} = \frac{518\ 400\ 000}{1\ 628\ 681\ 471} \qquad (4)$$

و اگر محیط دایره را چنانکه معمول است ۳٦۰ جزء بگیریم قطر آن می‌شود[2] :

$$114 + \frac{954\ 312\ 306}{1\ 628\ 681\ 471}$$

به قسمی که :

$$\frac{\text{قطر}}{\text{محیط}} = \frac{114}{360} + \frac{954\ 312\ 306}{1\ 628\ 681\ 471 \times 360}$$

(پایان آنچه از « قانون مسعودی » اخذ و ترجمه شد) .

***

۲٤۰ـ عکس مقدار سمت راست تساوی (۳) مساوی است با ۳٫۱٤۱۷٤۲ و عکس مقدار سمت راست رابطهٔ (٤) مساوی است با ۳٫۱٤۱۷٤٤ و چون **بیرونی** قطر را مساوی با ۲ گرفته است این دوعدد مقدارهای تقریبی عدد پی (π) هستند. بنابراین مقادیر تقریبی که از محاسبهٔ **ابوریحان بیرونی** برای عدد پی (π) به دست

---

۱ ــ اگر کسر طرف راست رابطهٔ (۳) را به‌صورت :

$$\frac{1}{3 + \frac{8}{(60)} + \frac{30}{(60)^2} + \frac{17}{(60)^3} + \frac{16}{(60)^4} + \frac{46}{(60)^5} + \frac{30}{(60)^6}}$$

بنویسیم و اعمال لازم را در دستگاه دهگانی انجام دهیم و صورت و مخرج کسر حاصل را به ۹ ساده کنیم کسر سمت راست رابطهٔ (٤) حاصل می‌شود .

۲ ــ زیرا اگر در رابطهٔ (٤) محیط را ۳٦۰ بگیریم حاصل می‌شود :

$$\text{قطر} = \frac{518\ 400\ 000 \times 360}{1\ 628\ 681\ 471} = 114 + \frac{954\ 312\ 306}{1\ 628\ 681\ 471}$$

می‌آید کمی بیشتر از مقدار تقریبی ۳٫۱۴۱۶۶ است که دقیقتر است و یونانیان و هندیان پیش از وی برای پی حساب کرده بودند. علت این امر این است که بیرونی همانطورکه گفتیم مقدار وتر روبروی قوس دودرجه وهمچنین ظل یک‌درجه را زیادتر از مقادیر واقعی آنها که خود وی درجدول جیوب و جدول اظلال «قانون مسعودی» حساب کرده اختیارکرده است. واگر این دومقدار را صحیح اختیار می‌کرد نتیجهٔ محاسباتش دقیقتر می‌شد.

با وجوداین، مطالب این فصل از «قانون مسعودی» نشان می‌دهد که ریاضیدانان دورهٔ اسلامی خود روش جدیدی برای محاسبهٔ نسبت قطر دایره به‌محیط آن ودرنتیجه برای‌محاسبهٔ عدد (π) داشته‌اند. **بیرونی** دراینجا مستقیماً راه روشن و عملی حل مسأله را نشان می‌دهد و روش وی بسیار بهتر از روشی است که **ابن‌هیثم** مصری در رسالهٔ «تربیع دایره» خود به‌کار برده است[۱].

۲۴۱ـ برای کسب‌اطلاع ازتاریخچه عدد پی (π) به یکی از منابع زیررجوع کنید:

سمیث H ج ۲ صفحات ۳۰۷ تا ۳۱۳ - **قربانی**، تاریخ پی - وبه‌صفحات ۹۱ تا ۹۷ کتاب زیر:

HOWARD EVES: An Introduction to the History of Math., 1964; Holt, Rinehart and Winston, New York.

خلاصهٔ مطالب رسالهٔ محیطیه بااصطلاحات کنونی

۲۴۲ـ درفصل اول «محیطیه» **کاشانی** قضیه زیر را که اساس همهٔ محاسبات بعدی وی در رسالهٔ مذکور است ثابت کرده:

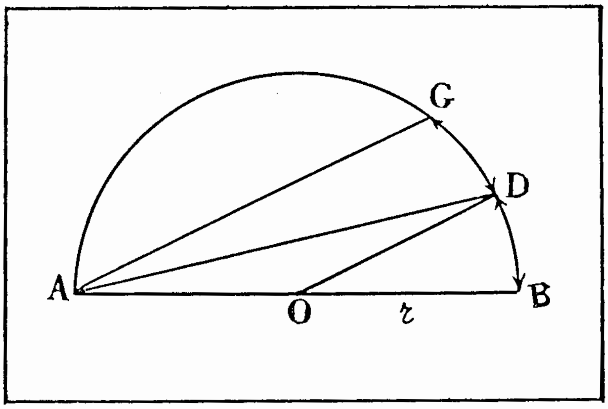
---

۱ ← **شوی** T: ص ۳۲ ذیل شمارهٔ ۲.

قضیه - اگر روی نیمدایرهٔ به قطر $AB=۲r$ و به مرکز O قوس دلخواه AG را درنظر بگیریم و وسط قوس GB را که مکمل قوس AG است نقطهٔ D بنامیم و AD را رسم کنیم رابطهٔ زیر برقرار است :

$$r(۲r+AG)=\overline{AD}^{۲} \qquad (۱)$$

و نتیجه گرفته است که اگر شعاع دایره وطول وتر AG معلوم ونقطهٔ D وسط قوس BC باشد می‌توان وتر AD را حساب کرد .



۲۴۳ـ تبصره ـ اگر اندازهٔ قوس AG را برحسب رادیان ۲φ بنامیم و شعاع دایره را واحد بگیریم خواهیم داشت :

$$AG=۲\sin\varphi$$

و :

$$AD=۲\sin\frac{۱}{۲}\left(۲\varphi+\frac{\pi-۲\varphi}{۲}\right)=۲\sin\left(\frac{\pi}{٤}+\frac{\varphi}{۲}\right)$$

ورابطهٔ (۱) شمارهٔ قبل یعنی رابطه‌ای که **کاشانی** صحت آن را درسال ۸۲۷ (۱٤۲٤) ثابت کرده به‌صورت زیر درمی‌آید :

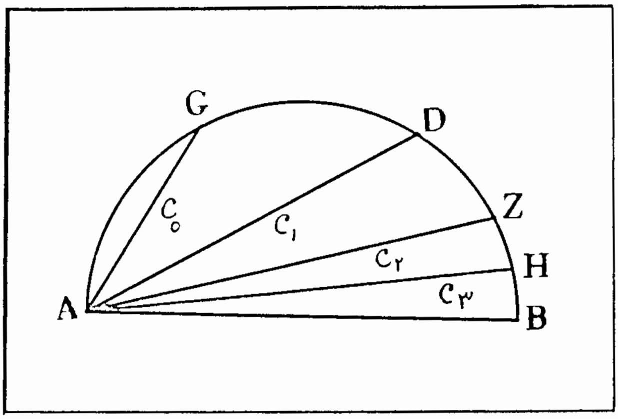
$$۲+۲\sin\varphi=٤\sin^{۲}\left(\frac{\pi}{٤}+\frac{\varphi}{۲}\right)$$

و ازآنجا :

$$\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\varphi}{۲}\right)=\sqrt{\frac{۱+\sin\varphi}{۲}}$$

و این همان رابطهٔ مثلثاتی است که نخستین بار در اروپا توسط **لامبرت** (J.H. Lambert) درسال ۱۷۷۰ میلادی (یعنی ۳۲۶ سال بعد ازکاشانی) به‌دست آمد[۱] .

۲۴۴ـ درفصل دوم « محیطیه » **کاشانی** دایره‌ای به قطر AB=۲r را درنظر می‌گیرد و قوس AG را مساوی با ۶۰ درجه اختیار می‌کند و وسط قوس BG را نقطهٔ D ووسط‌قوس BD را نقطهٔ Z ووسط قوس BZ را نقطه H می‌نامدومی‌گوید با استفاده از قضیه‌ای‌که در فصل اول ثابت شد می‌توان وتر AD را از روی AG ووتر AZ را از روی AD ووتر AH را از روی AZ حساب‌کرد وعمل را تاهرجا لازم باشد ادامه داد .



در واقع با اصطلاحات وعلائم‌کنونی **کاشانی** روش محاسبهٔ وترهای روبروی قوسهای زیر را بیان‌کرده است :

۱ ← **یوشکویچ** G : ص ۳۱۴ - **لوکی** L : ص ۵۰ .

$$\widehat{AG} = \alpha_{\circ} = ٦٠^{\circ}$$

$$\widehat{AD} = \alpha_{١} = ١٨٠^{\circ} - ٦٠^{\circ} = ١٢٠^{\circ}$$

$$\widehat{AZ} = \alpha_{٢} = ١٨٠^{\circ} - \frac{٦٠^{\circ}}{٢} = ١٥٠^{\circ}$$

$$\widehat{AH} = \alpha_{٣} = ١٨٠^{\circ} - \frac{٦٠^{\circ}}{٢^{٢}} = ١٦٥^{\circ}$$

و بطور کلی :

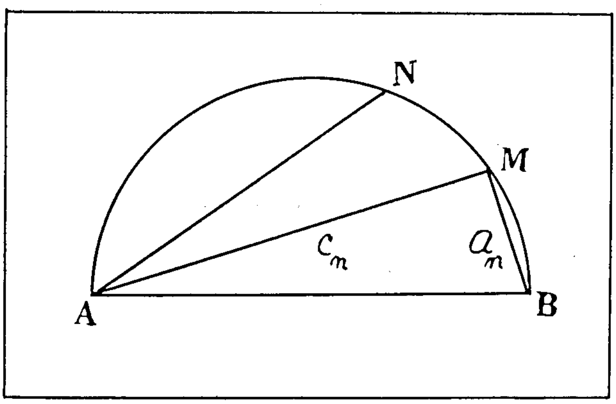
$$\boxed{\alpha_n = ١٨٠^{\circ} - \frac{٦٠^{\circ}}{٢^{n-١}}} \qquad (٢)$$

اگر وتر روبروی قوس α_n را C_n بنامیم محاسبهٔ هریک از وترهای C_n از روی وتر ماقبل آن $C_{n-١}$ به وسیلهٔ قضیهٔ مذکور انجام می گیرد :

$$(C_n)^{٢} = r(٢r + C_{n-١})$$

و از آنجا :

$$\boxed{C_n = \sqrt{r(٢r + C_{n-١})}} \qquad (٣)$$



اکنون روی شکل وتر AM را C_n فرض می‌کنیم و وتر BM را a_n می‌نامیم . پس از آنکه C_n از روی دستور (۳) حساب شد چون مثلث AMB قائم‌الزاویه است می‌توان a_n یعنی BM را حساب کرد :

$$\boxed{a_n = \sqrt{(۲r)^۲ - (C_n)^۲}} \qquad (۴)$$

اما a_n درست مساوی با ضلع ۳×۲^n ضلعی منتظم محاطی است زیرا با درنظر گرفتن تساوی (۲) داریم :

$$\widehat{MB} = ۱۸۰^\circ - \widehat{AM} = ۱۸۰^\circ - \left(۱۸۰^\circ - \frac{۶۰^\circ}{۲^{n-۱}}\right)$$

$$= \frac{۶۰^\circ}{۲^{n-۱}} = \frac{۳۶۰^\circ}{۳ \times ۲^n}$$

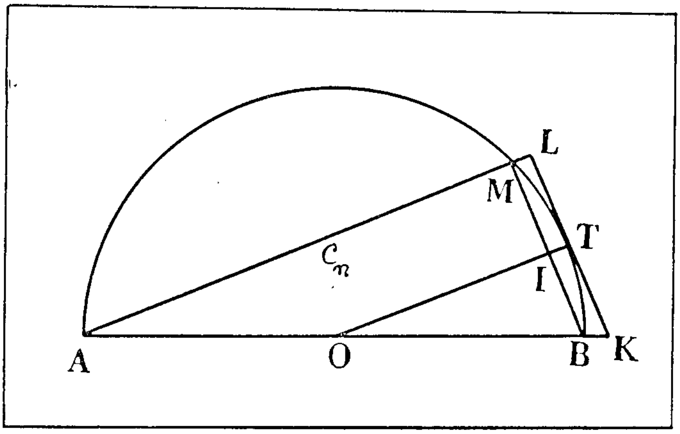
پس قوس MB مساوی با $\frac{۱}{۳ \times ۲^n}$ محیط دایره و وتر MB مساوی باضلع ۳×۲^n ضلعی منتظم محاطی است .

بنابرآنچه گذشت: **به‌ازای هرمقدار دلخواه n (n عددی‌است‌صحیح‌ومثبت) می‌توان a_n یعنی ضلع ۳×۲^n ضلعی محاطی را حساب‌کرد .**

۲۴۵ ـ برای محاسبهٔ ضلع ۳×۲^n ضلعی منتظم محیطی **کاشانی** به طریق زیر عمل کرده است :

فرض کنیم BM ضلع ۳×۲^n ضلعی منتظم‌محاطی باشد . اگروسط قوس BM را نقطهٔ T بنامیم و OT رارسم کنیم تا BM رادرنقطهٔ I قطع کندودرنقطهٔ T مماسی بردایره رسم کنیم تا امتداد OM را درنقطهٔ L وامتداد OB را درنقطهٔ K قطع کند KL ضلع ۳×۲^n ضلعی‌منتظم محیط بردایره ومشابه با ۳×۲^n ضلعی‌منتظم‌محاطی مذکور خواهد بود . **کاشانی** صحت رابطهٔ :

$$\frac{OI}{OT-OI}=\frac{BH}{KL-BH} \tag{۵}$$



را ثابت کرده و گفته‌است که چون OI نصف AM است اگر AM و BM معلوم باشند (وطریقهٔ محاسبهٔ آنهارا قبلاً درشمارهٔ ۲۴۴ دیدیم) می‌توان KL را به‌وسیله رابطهٔ (۵) حساب کرد. **بنابراین به ازاء هرمقدار دلخواه n می‌توان KL یعنی ضلع ۳×۲^n ضلعی منتظم محیطی را به‌دست‌آورد.**

۲۴۶ـ درفصل‌سوم«محیطیه» هدف‌مؤلف‌این‌است که عدهٔ‌اضلاع کثیرالاضلاع منتظم محاطی را طوری تعیین کند و دراعمال مربوط به محاسبهٔ طول محیط آن به اندازه‌ای دقت به‌کار برد که همانگونه که در مقدمه (شمارهٔ ۲۳۷) گفته است در دایره‌ای که قطرش‌ششصدهزاربرابرقطر کرهٔ‌زمین باشداختلاف بین‌محیط کثیرالاضلاع و محیط دایره به‌یک مو نرسد.

بدواً خاطرنشان‌می‌کنیم که **کاشانی** واحدهای زیر را برای‌طولها‌به‌کار می‌برد:

۱ فرسنگ = ۱۲۰۰۰ ذراع (تقریباً شش کیلومتر)

۱ ذراع = ۲۴ اصبع (تقریباً ۵۰ سانتی‌متر)

۱ اصبع (انگشت) = ۶ برابر عرض یک دانه جو

۶ شعره = ضخامت جو

ضخامت موی یال اسب = شعره

کاشانی گفته است که دایره‌ای که قطرش ششصد هزار برابر قطر کرهٔ زمین باشد طول محیطش نیز ششصد هزار برابر محیط کرهٔ زمین است و به فرض آنکه طول محیط کرهٔ زمین ۸۰۰۰ فرسنگ باشد(۱) محیط دایرهٔ مذکور را که ۸۰۰۰ × ۶۰۰۰۰۰ فرسنگ است در ۱۲۰۰۰ ضرب کرده تا برحسب ذراع معلوم شود و سپس حاصل را به ترتیب در ۲۴ و ۶ و ۶ نیز ضرب کرده تا اندازهٔ محیط به ترتیب برحسب اصبع و ضخامت جو و عرض مو به‌دست آید و پس از آنکه اندازهٔ محیط دایرهٔ مذکور برحسب مو معلوم شد یک درجه یعنی $\frac{۱}{۳۶۰}$ آن را گرفته و نشان داده است که یک ثامنه (یعنی $\frac{۱}{(۶۰)^۸}$) آن تقریباً مساوی با $\frac{۴}{۵}$ ضخامت یک مو است :

$$\frac{۶۰۰۰۰۰ \times ۸۰۰۰ \times ۱۲۰۰۰ \times ۲۴ \times ۶ \times ۶}{۳۶۰ \times (۶۰)^۸} = \frac{۲۰۰}{۲۴۳} \approx \frac{۴}{۵}$$

و نتیجه گرفته است که اگر محیط‌های دو کثیرالاضلاع منتظم محاطی و محیطی را طوری استخراج کند، یعنی عدهٔ اضلاع آنها را به قدری بزرگ انتخاب نماید، که تفاوت بین دو محیط به یک **ثامنه** (یعنی مرتبهٔ هشتم از کسرهای شصتگانی = $\frac{۱}{(۶۰)^۸}$) نرسد منظور وی حاصل خواهد شد و پس از به‌کار بستن تدابیر ماهرانه درمحاسبات تقریبی به‌این نتیجه رسیده است که باید در دایرهٔ به شعاع ۶۰ واحد کثیرالاضلاعی محاط کند که طول هرضلع آن از ۸ رابعه $\left(= \frac{۸}{(۶۰)^۴} \right)$ بیشترنباشد

۱ — در ذیل شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۱۷۱ دیدیم که **کاشانی** قطر زمین را ۲۴۸۵ فرسنگ محسوب‌داشته پس به‌حساب او محیط کرهٔ زمین می‌شود $۲۴۸۵ \times \pi \approx ۷۸۰۵$ و کاشانی عدد ۷۸۰۵ را گرد کرده و آن را ۸۰۰۰ گرفته است.

و جدولی تشکیل داده که دریک طرف آن ۱۲۰ درجه را ۲۸ بار نصف کرده و در طرف دیگر آن عدهٔ اضلاع کثیرالاضلاع را ابتدا ازمثلث ۲۸ بار دوبرابر کرده وعدهٔ اضلاع آن را :

$$۳ \times ۲^{۲۸} = ۸۰۵\ ۳۰۶\ ۳۶۸$$

یافته است[۱] و بالاخره به‌این نتیجه رسیده که باید طول ضلع ۳×۲^{۲۸} ضلعی منتظم محاط دردایرهٔ به‌شعاع ۶۰ واحد را حساب کند (البته در «محیطیه» همهٔ محاسبات در دستگاه شصتگانی صورت گرفته است) و با ذکر دلیل نشان داده است که برای آنکه نتیجهٔ محاسباتش به‌اندازهٔ کافی دقیق باشد بایدهرعمل را دردستگاه شصتگانی تا مرتبهٔ **ثامنةعشر** $\left(= \frac{۱}{(۶۰)^{۱۸}} \right)$ ادامه دهد .

۲۴۷ـ درفصل چهارم « محیطیه » که مفصلترین فصلهای آن است **کاشانی** با استفاده از دستور (۳) شمارهٔ ۲۴۴ یعنی :

$$C_n = \sqrt{r(۲r + C_{n-۱})} \qquad (۳)$$

به‌ترتیب :

$$C_۱ = ۱۲۰^\circ \text{ وتر}$$

$$C_۲ = ۱۵۰^\circ \text{ وتر}$$

$$C_۳ = ۱۶۵^\circ \text{ وتر}$$

و بالاخره :

$$C_{۲۸} = \text{(دایره)}\ \frac{۱}{۸۰۵\ ۳۰۶\ ۳۶۸}\ \text{وتر روبروی قوس مکمل}$$

را حساب کرده‌است . این فصل مشتمل بر ۲۸ عمل است و درهریک از آنها **کاشانی**، با گرفتن جذر ، یکی از C_n ها را حساب کرده و خود درآغاز این فصل نوشته است که تا ازصحت هرعمل اطمینان کامل حاصل نکرده به عمل بعدی نپرداخته است

۱ ــ این عدد درآغاز فصل‌ششم «محیطیه» اشتباهاً ۱۶۸ ۳۳۵ ۸۰۰ ثبت شده‌است.

و در ذیل هرعمل استخراج جذر، حاصل جذر را مربع و با باقیماندهٔ جذر جمع کرده و به این نحو عمل را امتحان کرده و از درستی آن مطمئن شده است .

کاشانی $C_{٢٨}$ را با ١٨ رقم کسری شصتگانی مساوی با :

$$C_{٢٨}=١,٥٩;٥٩,٥٩,٥٩,٥٩,٥٩,٥٩,٥٩,٥٩,٥٠,٤٧,٥٢,١٢,٣٠,٤٨,٣٧,٤٩,٥٤,٤٠$$

حساب کرده است .

اگر شعاع دایره را مساوی با واحد بگیریم $C_{٢٨}$ در دستگاه دهگانی مساوی است با[1] :

$$C_{٢٨}=\sqrt{٢+\sqrt{٢+\cdots+\sqrt{٢+\sqrt{٣}}}}$$

که درآن عدهٔ رادیکالها ٢٨ است .

٢٤٨ـ درفصل پنجم محیطیه **کاشانی** با استفاده از دستور (٤) شمارهٔ ٢٤٤ یعنی:

$$a_n=\sqrt{(٢r)^٢-(C_n)^٢} \qquad (٤)$$

ضلع ٣×٢^{٢٨} ضلعی منتظم محاطی را در دستگاه شصتگانی با ١٤ رقم کسری (شصتگانی) مساوی با عدد زیر به‌دست آورده است :

$$a_{٢٨}=0;0,0,0,٦,٤,١,١٤,٥٩,٣٦,١٤,٣٣,٣٦,١٩,٢٥$$

---

١ — زیرا $C_١$ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی است و داریم $C_١=\sqrt{٣}$ و از دستور (٣) شمارهٔ ٢٤٤ بترتیب حاصل می‌شود :

$$C_٢=\sqrt{٢+\sqrt{٣}}$$

و :

$$C_٣=\sqrt{٢+\sqrt{٢+\sqrt{٣}}}$$

و :

$$C_٤=\sqrt{٢+\sqrt{٢+\sqrt{٢+\sqrt{٣}}}} \qquad \text{وغیره}$$

اگر شعاع دایره را واحد بگیریم $a_{٢٨}$ در دستگاه دهگانی مساوی است با :

$$a_{٢٨}=\sqrt{٢-\sqrt{٢+\sqrt{٢+\cdots+\sqrt{٢+\sqrt{٣}}}}}$$

که درآن عدهٔ رادیکالها ٢٨ است.

٢٤٩ـ درفصل‌ششم «محیطیه» **کاشانی** $a_{٢٨}$ را در ٣×٢^{٢٨} ضرب کرده ومحیط ٣×٢^{٢٨} ضلعی منتظم محاطی وسپس از روی‌آن با استفاده ازدستور (٥) شمارهٔ ٢٤٥ محیط ٣×٢^{٢٨} ضلعی منتظم محیطی را نیز حساب کرده است و نصف مجموع این دو محیط را طول محیط دایره گرفته است و آن مساوی است با :

در دستگاه شصتگانی با حروف جمل	مرتفع یک بار	اجزا	دقایق	ثوانی	ثوالث	روابع	خوامس	سوادس	سوابع	ثوامن
	و	یو	نط	کح	ا	لد	نا	مو	ید	ن

در دستگاه شصتگانی وبا قرارداد شمارهٔ ١٧٨ کتاب‌حاضر عدد فوق مساوی است‌با :

٦ , ١٦ ; ٥٩ , ٢٨ , ١ , ٣٤ , ٥١ , ٤٦ , ١٤ , ٥٠

یعنی:

$$٦+١٦+\frac{٥٩}{٦٠}+\frac{٢٨}{(٦٠)^{٢}}+\frac{١}{(٦٠)^{٣}}+\frac{٣٤}{(٦٠)^{٤}}+\frac{٥١}{(٦٠)^{٥}}+\frac{٤٦}{(٦٠)^{٦}}+\frac{١٤}{(٦٠)^{٧}}+\frac{٥٠}{(٦٠)^{٨}}$$

کاشانی مقدار محیط را که در دستگاه شصتگانی حساب کرده درمصراع اول بیت زیر به‌نظم درآورده است :

وَيَوْ نَطْ كَح ا لَدْ نامُوفيدنُ　　　محيط حيث نصف القطرسينُ

و از بیم آنکه مبادا نساخان درنوشتن این اعداد اشتباه کنند و نتیجهٔ محاسبات وی به هدر رود ، ونیز برای‌آنکه درموقع محاسبه بتوانند ازمضربهای‌محیط استفاده کنند، مقدارمحیط را دراعداد صحیح ازیک تا شصت ضرب کرده واین‌مضارب را درجدولی ثبت نموده است به قسمی‌که اگر مثلاً کسی ۵۸ برابر محیط را بخواهد می‌تواند از جدول مذکورآن را به‌دست آورد .

۲۵۰ـ ضمناً **کاشانی** به‌این‌نکته اشاره کرده‌است که اگر شعاع دایره را به‌جای ۶۰ مساوی با واحد بگیریم همان عدد باز اندازهٔ محیط (یعنی در واقع عدد 2π) خواهد بود اما باید همهٔ مرتبه‌های آن را یک بار تنزل‌دهیم . یعنی مثلاً دقیقه‌ها را ثانیه و ثانیه‌ها را ثالثه و بالاخره ثامنه‌ها را تاسعه محسوب داریم . بنابراین‌مقدار عدد 2π به‌حساب **کاشانی** و در دستگاه شصتگانی با قراردادی که درشمارهٔ ۱۷۸ گذاشته‌ایم عبارت است از :

$$2\pi = ٦ ; ١٦ , ٥٩ , ٢٨ , ١ , ٣٤ , ٥١ , ٤٦ , ١٤ , ٥٠$$

همهٔ مراتب کسرهای شصتگانی این عدد دقیق است . با این‌حال **کاشانی** در **فصل هفتم** « محیطیه » بار دیگر به تفصیل ثابت می‌کند که آنچه درمراتب آخر اعداد در موقع محاسبه ازآنها صرف نظر کرده است در نتیجهٔ نهائی محاسبات خللی وارد نمی‌آورد و درآخر این فصل می‌نویسد[1] : « و دراین باره به تفصیل پرداختم تا معلوم شود که آنچه ازکسرهای زاید و ناقص درآخرین مراتب این اعمال ازآنها چشم‌پوشی شده آن‌اندازه نیست که درمقدار محیط به یک تاسعهٔ کامل $\left(=\frac{1}{(٦٠)^{٩}}\right)$ برسد .

۲۵۱ـ درفصل هشتم«محیطیه» **کاشانی** مقدارمحیط دایره‌رابه‌فرض‌آنکه شعاع

---

۱ — « قداطنبت‌الکلام‌فیه‌لیعلم ان‌اهمال‌الکسورالزائدةاوالناقصة فی‌آخر مراتب هذه الاعمال لایعتدالی‌تاسعةواحدةتامة فی‌مقدارالمحیط » .

آن واحد باشد ، یعنی در واقع مقدار ۲π ، را در دستگاه شمار دهگانی و با کسرهای اعشاری که خود مخترع آنها است به دست آورده است به این شرح[1] :

$$۲\pi = ۶٫۲۸۳\ ۱۸۵\ ۳۰۷\ ۱۷۹\ ۵۸۶\ ۵$$

همهٔ شانزده رقم اعشاری این عدد دقیق است و این نهایت دقت **کاشانی** را در محاسبه می‌رساند. باز برای آنکه در اثر اهمال نسخه نویسان در ارقام این عدد خللی وارد نیاید و ضمناً در حین محاسبه بتوانند از مضارب ۲π استفاده کنند **کاشانی** مقدار ۲π را در اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰ ضرب و حاصلها را در جدولی ثبت کرده است. به قسمی که اگر مثلاً کسی بخواهد مقدار ۶π را بداند می‌تواند آن را از روی جدول مذکور به دست آورد.

کاشانی به خوبی از اهمیت کار خود در محاسبهٔ ۲π آگاه بوده و برای آنکه نتیجهٔ کارش محفوظ بماند ارقام آن را (از چپ به راست) هم در یک بیت عربی و هم در یک بیت فارسی به نظم درآورده است :

به عربی :

وبَحْجا حَهَج صَزْ اَزَطْه حُوَهٌ   محیطٌ لقطر هـو اثنـان منه[2]

به فارسی :

---

۱ - این مقدار ۲π را **کاشانی** در ۱۴۲۴ میلادی به دست آورده است. بعداً در اروپا **ویت** (Viète) در سال ۱۵۷۹ میلادی یعنی در حدود ۱۵۵ سال بعد از **کاشانی** فقط یازده رقم اعشاری دقیق π را به‌دست‌آورد و **آدرین** (Adrian Romain) در سال ۱۵۹۳ فقط ۱۵ رقم اعشاری دقیق π و **لودلف** (Ludolf) در ۱۶۱۰ سی‌وپنج رقم اعشاری دقیق آن را حساب کردند.

۲ - در مصراع اول کلمهٔ «صزْ» مرکب از **صاد** حرف اول صفر و **زا** یعنی رقم ۷ می‌باشد.

ششن و دوهشت و سه یک هشت و پنج و سه صفری

بهفت و یک‌زاو نه پنج و هشت وشش پنج است[۱]

۲۵۲- در **فصل نهم**«محیطیه» **کاشانی** روش استفاده از جدولهای مضارب ۲π را در دستگاههای‌شمارشصتگانی و دهگانی شرح داده وراه محاسبهٔ محیط دایره‌را در صورتی که قطر آن معلوم باشد و همچنین روش محاسبهٔ قطر را درصورتی که محیط دایره معلوم باشد نشان داده و دو مثال عملی نیز آورده است. یکی محاسبه محیط دایره‌ای که قطرش $\frac{۱}{۸}$ ٦٥٠٨٤٤ ذراع یا فرسنگ باشد و دیگری محاسبهٔ قطر دایره‌ای که محیطش $\frac{۱}{۸}$ ٦٥٠٨٤٤ ذراع باشد.

۲۵۳- در فصل دهم **کاشانی** عددی راکه خود برای π حساب کرده و آنچه قبل‌از وی برای π محسوب می‌داشته‌اند مقایسه کرده وگفته است که معمولاً عدد π را مساوی با $\frac{۱}{۷}$ ۳ می‌گیرند و تفاوت $\frac{۱}{۷}$ ۳ را با آنچه خود برای π به دست آورده حساب کرده و نشان داده است که اگر محیط دایره‌ای‌راکه شعاع آن ۳٦۰۰ ذراع باشد با دو مقدار مذکور حساب کنند تفاوت بین آنها به $\frac{۱}{۱۰}$ ۹ ذراع می‌رسد و دردایره‌ای که شعاعش $\frac{۱}{۷}$ ۷۰۷۳ برابرقطرکرهٔ زمین باشد این‌اختلاف به ۱۷۷ برابر قطر کرهٔ زمین بالغ می‌شود و به این نحو ظاهر ساخته است که نتیجهٔ محاسبات او تا چه اندازه به حقیقت نزدیک است.

۲۵٤- در خاتمهٔ « محیطیه » **کاشانی** برای آنچه در مقدمهٔ آن رساله در بارهٔ اشتباهات منسوب به **ابوالوفای بوزجانی و ابوریحان بیرونی** گفته بود دلیل آورده است.

درقسمت اول خاتمه با ذکر دلیل واتکای به‌قضایایی ازمقالهٔ اول‌مجسطی

---

۱ - در مصراح دوم **زا** به معنی رقم ۷ است.

بطلمیوس و ترقوس یک درجه و سی‌دقیقه‌را حساب کرده و بااستفادهٔ از آن مقداری را که خود برای وتر ۳۰ دقیقه به دست آورده با مقداری که منسوب به **بوزجانی** است مقایسه نموده و نشان داده است که مقداری که او به دست آورده درست‌تر است و بالاخره درقسمت دوم آن و ترقوس دو درجه‌را حساب کرده و آن را بانتیجهٔ محاسبهٔ **بیرونی** مقایسه نموده است.

بخش پنجم

بررسی رسالهٔ وتر و جیب

۲۵۵ـ کاشانی در مقدمهٔ «مفتاح‌الحساب» در ضمن ذکر اسامی تألیفات خود از این رساله نام برده و نوشته‌است[1]: «و رساله های دیگر تضیف کردم مانند... و رسالهٔ وتر و جیب در استخراج آن دو برای یک سوم قوسی که وتر و جیب آن معلوم باشد و این نیز یکی از مسائلی است که برپیشینیان دشوار بوده چنانکه صاحب مجسطی (=بطلمیوس) در آن کتاب گفته است که برای به دست آوردن آن راهی نیست».

از متن اصلی این رساله متأسفانه نشانه‌ای در دست نیست اما چنانکه خواهیم دید برآن شرحهایی نوشته‌اند و از روی آنها می‌توان قسمت اساسی آن را به دست آورد.

بحث در وجود رسالهٔ وتر و جیب

۲۵۶ـ در اینجا باید در بارهٔ عبارت نادرستی که در حاشیهٔ «مفتاح‌الحساب» چاپی آمده است توضیحی بدهیم:

در حاشیهٔ صفحهٔ سوم «مفتاح الحساب» چاپی در بارهٔ **کاشانی** نوشته شده

---

۱ ← **مفتاح**، ص ۲ و ۳: «وصنفت رسائل اخری مثل الرسالة المسماة بسلم السماء ... و رسالة الوتروالجیب فی استخراجهما لثلث القوس المعلومة الوتر و الجیب و ذلک ایضا مما صعب علی‌المتقدمین کما قال صاحب‌المجسطی فیه ان لیس الی تحصیله سبیل».

است[۱]: «جیب یک درجه را تا تاسعه درغایت‌درستی و دقت به طریق‌جبر و مقابله (از راهی) غیراز مسائل ششگانه (=المسائل الست) استخراج کرد امابه‌علت کوتاهی عمرش موفق نشد رساله را به پایان برساند».

۲۵۷ـ به دلایل زیر این ادعاکه **کاشانی** رسالهٔ «**و تر وجیب**» را به پایان نرسانده درست نیست:

اولاً ـ چنانکه گفتیم **کاشانی** خود در مقدمهٔ «مفتاح الحساب» به صراحت رسالهٔ «وتر وجیب» را از تألیفات خود می‌شمارد و گذشته ازاین به تصنیف چنان رساله‌ای مباهات می‌کند و می‌نویسد «این نیز یکی از مسائلی است که برپیشینیان دشوار بوده است». با درنظرگرفتن اینکه **کاشانی** «مفتاح الحساب» را به **الغ بیک** اهدا کرده و علاوه براینکه **الغ بیک** خود ریاضیدان بوده است در آن زمان پانصدکس در سمرقند به‌ریاضیات مشغول‌بوده‌اند ودربیست موضع درس ریاضیات می‌گفته‌اند[۲] باورکردنی نیست که **کاشانی** در مقدمهٔ کتابی که می‌خواسته است آن را به سلطان وقت اهدا کند، آن هم با داشتن همکارانی که با وی رقابت می‌کرده‌اند و در چنان محیط علمی، ادعای بی اساسی مبنی برتصنیف رسالهٔ و تروجیب کرده و حتی به آن تفاخر نموده باشد.

علاوه براین درحاشیهٔ برگ ۳۲ از نسخهٔ خطی «زیج خاقانی» تألیف **کاشانی** که در دیوان هند(ایند یا افیس) موجود است عبارتی از **کاشانی** نقل شده[۳] ودر آن ازقول **کاشانی** آمده است که «قد ما راهی برای محاسبهٔ دقیق جیب ثلث‌زاویه‌ای که جیب‌آن معلوم‌باشد نیافته‌اند وماطریقه‌ای یافتیم‌و **رساله‌ای در بارهٔ آن نوشتیم**

۱ - استخرج جیب درجه واحده الی‌التاسعه فی غایة‌الصحة و الدقة بطریق‌الجبر و المقابله بغیرالمسائل‌الست لکن لم یوفق لاتمام الرسالة لفقر عمره و کتب‌الحکیم الفیلسوف قاضی زاده الرومی ...»

۲ - رجوع شود به شمارهٔ ۷۷ کتاب حاضر.

۳ ← **آبو**: ص ۲۸.

و جیب زاویهٔ یک درجه را باآن طریقه حساب کردیم».

ثانیاً ـ قاضی زادهٔ رومی که رسالهٔ «وتر وجیب» را تحریر کرده است (شرحش خواهد آمد) در مقدمهٔ این تحریر نوشته است[۱] : «این رساله‌ای است در استخراج جیب یک درجه با اعمالی متکی برقاعده‌های هندسی و حسابی که برادر ارجمند و یکتای زمان خود جمشید پسر مسعود طبیب، ملقب به غیاث کاشانی به آن ملهم شده است ... اماچون در سخن او ایجازی است که از حد لغز هم گذشته و تصرفاتی دیده می‌شود که از کثرت تعقید راه‌فهم را بربسته وبه جایی‌رسیده است که به‌راهنمایی نیاز پیدا کرده است، برمن از راه برادری واجب آمد که آنچه را او گفته شرح و بسط دهم و هرچه را پوشیده گذارده باز نمایم و دشواری‌آن را هموار سازم و تصرفات‌وی را بیان کرده برمقدمات آن برهان آورم[۲] ...»

ملاحظه می‌شود که گذشته از آنکه **قاضی زادهٔ رومی** که معاصر و همکار و شاید رقیب **کاشانی** بوده دراین مقدمه سخنی از ناتمام ماندن رسالهٔ «وتر و جیب» **کاشانی** به میان نیاورده، از سیاق عبارات فوق کاملاً واضح است که وی رسالهٔ **کاشانی** را در دست داشته وگفته های او را شرح و بسط داده است. علاوه براین **قاضی زاده** پس‌از عباراتی که ترجمهٔ آن را آوردیم مطالبی می‌نویسد[۳] که‌مطالعهٔ

---

۱ ← **قاضی زاده** : ص ۳۸ : «و بعد فهذه رسالة فی استخراج جیب درجة واحدة باعمال مؤسسة علی قواعد هندسیة حسابیة قد ألهم به الاخ الاعز و حید زمانه جمشیدبن مسعود الطبیب‌الملقب بغیاث الکاشی ... لکن لماکان فی‌کلامه ایجاز تجاوز حدالالغاز و تصرفات‌سدت سبیل الفهم بالتعقید و ادت الی مایحتاج الی التسدید و جب علی من طریق الاخوة أن أبسط ما ذکره و اکشف ماستره و احل‌العقد و اسدد الاود و ابین التصرفات و ابرهن علی‌المقدمات ...»

۲ - این ترجمه با مختصر تصرفاتی از مقالهٔ آقای محیط طباطبائی اقتباس شده است (← **محیط**، غیاث‌الدین، ص ۲۴).

۳ ← **قاضی زاده** : ص ۳۹ : «و اسوق الکلام مراعیاً لترتیب کلامه ... ثم‌اذکر کلامه بعباراته».

آن کوچکترین تردیدی دراینکه وی متن رسالهٔ «وتر وجیب»را در دست داشته‌است باقی نمی گذارد : «در سیاق سخن ترتیب کلام او (= کاشانی) رامراعات کردم ... و سخن او را با عبارات خود او آوردم».

ثالثاً - ملاعبدالعلی بیرجندی در شرح «زیج الغ بیک» می‌نویسد[۱] : «و افضل المهندسین مولانا غیاث‌الحق والدین جمشید الکاشی ره که اصل رصد سمرقند ازآثار طبع لطیف اواست ملهم شده بطریق استخراج جیب یک درجه **ودرآن باب رساله‌ای انشا نموده ...** » سپس **بیرجندی** قسمت اساسی و مهم رسالهٔ مذکور را به فارسی برگردانده است[۲] و در پایان آن می‌نویسد : «و چون در نسخهٔ اصل بعضی ارقام را از این عمل در جدول آورده و بعضی را ترک کرده ما **این** عمل را نیزازسرگرفته استخراج کردیم تا اگر ناظر را اشتباهی واقع شود رجوع به آن نماید» . از این عبارات به خوبی واضح است که **بیرجندی** متن رسالهٔ «وتر و جیب» را در اختیار داشته است.

۲۵۸- تبصره - در جزومجموعهٔ خطی‌شمارهٔ ۱۰۷۱ کتابخانهٔ مرکزی‌دانشگاه تهران رساله‌ای به فارسی موجود است موسوم به «رساله در معرفت و ترثلث قوس معلومةالوتر» تألیف **میرزا ابوتراب‌بن احمد** که بنا به قول **عباس اقبال‌آشتیانی** از ریاضیدانان عهد محمد شاه قاجار بوده است[۳].

میرزا ابوتراب در مقدمهٔ رسالهٔ مذکور نوشته است : «... و سایر مهندسان نیز عدم امکان استنباط آن را مسلم داشته‌اند مگر فاضل مهندس بارع **غیاث الدین جمشید الکاشانی** که بعدازاعمال قواعد هندسیه و استعمال جبر و مقابله طریقه‌ای بجهت آن استنباط و در رسالهٔ «وتروجیب» ایراد نموده و امیر شهید **میرزا الغ بیک** به همان طریقه از وتر شش درجه وتر دو درجه را استنباط و از آن جیب یک درجه

---

۱ ← **بیرجندی** ، شرح زیج ، روی برگ ۴۰.

۲ ← **بیرجندی** ، شرح زیج : پشت برگ ۴۱ تا پشت برگ ۴۲.

۳ ← **مصاحب** ، حکیم خیام : ذیل صفحهٔ ۱۵۲.

را به تحقیق بیرون آورده و وضع جدول جیب را در زیج به همان قانون کرده است» سؤلف مذکور پس‌از تمهید دو مقدمه روش **کاشانی** را شرح داده و درآغاز آن می‌نویسد : «و بعداز تمهید این دو مقدمه شروع در مقصد می‌شود . اما طریقهٔ موروثه از مهندس فاضل غیاث‌الدین جمشید. پس به جهت آن فرض کنیم قوس **ا ب ج د ...**»

شرحهایی که بر رسالهٔ وتر وجیب نوشته‌اند

۲۵۹ـ الف ـ قاضی زادهٔ رومی رسالهٔ «وتر وجیب» **کاشانی** رابه عربی تحریر کرده است و عنوان کامل این تحریر این است : «رسالة فی استخراج جیب الدرجة الواحده علی التحقیق الحقیق استخرجه افضل المهندسین غیاث‌الدین جمشید القاسانی حرره و نقحه فی هذه الرسالة قاضی زاده الرومی مؤلف شرح چغمینی» .

این رساله در سال ۱۲۹۹ ه . ق . در تهران به چاپ سنگی رسیده و در آخر بعضی از نسخه های چاپی کتاب «مفتاح الحساب» دیده میشود .

از این رساله چند نسخهٔ خطی در ایران موسود است : دو نسخه خطی در کتابخانهٔ ملی ملک[۱] در جزو مجموعه های شمارهٔ ۳۵۳۶/۱ و ۳۱۸۰ و یک نسخهٔ خطی ناقص به شمارهٔ ۱۵۳۱ (۱۵۱۹) درکتابخانهٔ مجلس شورای ملی[۲] یک نسخهٔ خطی نیز از این رساله درکتابخانهٔ خدیویه مصر موجود است[۳] با این عنوان : «رسالة فی استخراج جیب درجة واحده باعمال مؤسسة علی قواعد هندسیة و حسابیة» این تحریر **قاضی زاده** درسال ۱۹۶۰ میلادی به زبان روسی ترجمه شده است[٤] .

---

۱ ـ شخصاً دیده‌ام.

۲ ← **فهرست مجلس** : ج ٤ ص ۲۳۳ شمارهٔ ۱۵۳۱ (۱۵۱۹) .

۳ ← فهرست‌الکتب العربیة المحفوظة بالکتبخانه الخدیویة المصریة : ج ٥ ص ۲۱۰ .

٤ ← **یوشکوویچ** G : ذیل صفحهٔ ۳۲۳ و ص ٤٤۳ ش 175a .

۲۶۰ـ ب ـ چون **الغ بیک** درباب دوم از مقالهٔدوم زیج خود دربارهٔ «معرفت جیب و سهم» گفتگو کرده است ، کسانی که «زیج الغ بیک» را شرح کرده‌اند وقتی به باب مذکور رسیده‌اند ودر بارهٔ روش استخراج جیب یک درجه‌به‌بحث‌پرداخته‌اند از رسالهٔ «وتروجیب» **کاشانی** نام برده و مطالب آن را تشریح کرده‌اند.

از جمله **ملاعبدالعلی بیرجندی** قسمت مهم رسالهٔ و تروجیب **کاشانی** را در شرحی که برزیج **الغ بیک** نوشته است آورده. همچنین **میرم چلبی** درشرح زیج **الغ‌بیک** موسوم به «دستور العمل و تصحیح الجدول» در بارهٔ رسالهٔ « وتروجیب » **کاشانی** بحث کرده است[۱].

نظر به اهمیت رسالهٔ «وتروجیب» **کاشانی** این قسمت ازشرح **میرم چلبی** برزیج **الغ‌بیک** یا خلاصهٔ آن به زبانهای فرانسوی وآلمانی و روسی وانگلیسی‌ترجمه شده است به این شرح :

ترجمهٔ فرانسوی توسط **سدیو** در۱۸۵۳ میلادی‌صورت گرفت[۲] و در ۱۸۵۴ میلادی **ویکه** نیز در مقاله‌ای[۳] روش **کاشانی** را در استخراج جیب یک درجه مورد بحث قرار داد و آن را روش **چلبی** نامید. ترجمهٔ آلمانی مختصری ازشرح **میرم چلبی** در ۱۹۲۲ میلادی توسط**کارل شوی** انجام یافت[۴].

در ۱۹۵۴ میلادی **آبو** مقالهٔ بسیار جالب و مفیدی‌در بارهٔ شرح **میرم چلبی** راجع به رسالهٔ «وتروجیب» **کاشانی** نوشت و در آن ، قسمت اساسی و مهم رسالهٔ «وتروجیب» را تفسیر و توجیه کرد[۵] بالاخره **رزنفلد و یوشکویچ** فصل مذکور

---

۱ ← **میرم چلبی** : ص ۴۳ به بعد.

۲ ← **سدیو** A : صفحات ۳۳۳ تا ۳۵۶ ـ سدیو P : ذیل صفحات ۶۹ تا ۸۳.

۳ ← **ویکه** D : صفحات ۱۵۵ به بعد و ۱۶۸ به بعد.

۴ ← **شوی** B : ذیل صفحات ۳۸۶ تا ۳۹۹.

۵ ← **آبو**.

از شرح میرم چلبی را در ۱۹۵۶ میلادی به زبان روسی ترجمه و تفسیر کردند[۱].

برای کسب اطلاع از عقیدهٔ دانشمندان اروپائی در بارهٔ رسالهٔ «وتروجیب» **کاشانی** رجوع کنید به شمارهٔ ۲۲ کتاب حاضر.

خلاصه‌ای از آنچه بیرجندی در بارهٔ رسالهٔ وتروجیب نوشته است

۲۶۱ـ گفتیم که اصل رسالهٔ «وتروجیب» **کاشانی** ازبین رفته است ولی می‌توان قسمت اساسی و مهم آن را از روی شرحهایی که برآن رساله نوشته‌اند (و ذکرش گذشت ← ش ۲۵۹ و ۲۶۰) به دست آورد. چون همهٔ بحث‌هایی که تا کنون دراین باره صورت گرفته است متکی برشرح **میرم چلبی** برزیج **الغ بیک** است و، از طرف دیگر، تحریر **قاضی زادهٔ رومی** به زبان عربی است و تا کنون ندیده‌ایم که کسی ازگفته های **بیرجندی** که به فارسی است دراین باره استفاده کرده باشد،وحال آنکه آنچه وی دراین مورد نوشته بسیار مفید و جامع و در واقع خلاصهٔ «رسالهٔ وتروجیب» **کاشانی** است و از بعضی جهات برتفسیر **قاضی زاده رومی** مزیت دارد، بهتر دیدیم که درکتاب حاضر آنچه را **بیرجندی** در بارهٔ این رساله نوشته است اساس قرار دهیم. بنابراین ابتدا گفته های **بیرجندی** را عیناً و بدون تغییر (حتی در رسم الخط) ازکتاب «شرح زیج الغ بیک» او دراینجا می‌آوریم ودرحاشیهٔ صفحات برخی از توضیحات لازم را اضافه می‌کنیم و سپس آن را بااصطلاحات و علائم قرار دادی کنونی بیان می‌کنیم[۲].

---

۱ ← **رزنفلد و یوشکویچ**: صفحات ۳۱۱ تا ۳۱۹ (ترجمهٔ روسی) و صفحات ۳۷۵ تا ۳۷۹ (تفسیر).

۲ - نوشتهٔ بیرجندی علاوه برآنکه نمونهٔ جالب‌توجهی از انشای کتابهای ریاضی قدیمی فارسی است شامل تعریف بعضی اصطلاحات از قبیل «جبر» و «مقابله» و «تکمیل» و «منحط کردن» و غیره است و رسم الخط آن در نسخهٔ خطی مذکور نیز جالب است مثلاً شیء را همه‌جا بدون همزه نوشته است.

۲۶۲ـ بیرجندی می‌نویسد[۱] : «از قواعد سابق جیب بسیاری از قسی را استخراج توان کرد و چون جیب سه درجه بان قواعد معلوم میتوان کرد قسی را که از سه باشد تا بنود بتفاصل سه سه هم بقواعد مذکور معلوم توان کرد اما بعضی از آن قبیل است که جیب آن اصلاً از این قواعد معلوم نتوان کرد مگر آنکه جیب یکدرجه را با جیب قوس معلومی ملاحظه کنند و ازآن هردو جیب مطلوب حاصل کنند واگر جیب یکدرجه معلوم باشد جیوب تمام از آن معلوم توان کرد و قد ماطریق استعلام آن بیان نتوانستند نمود. محقق طوسی در تحریر مجسطی میفرمایدلیس الی معرفت و ترثلث القوس المعلومة الوترمن جهة الخطوط (یعنی بالبراهین الهندسی) طریق و وتر قوس شش درجه معلوم است، اگر وتر ثلث او که دو درجه است معلوم شود جیب یکدرجه که نصف وتردودرجه است معلوم می‌شود. وایشان (=الغ بیک) جیب یک درجه بتقریب بیرون آورده‌اند و بنای جدول برآن نهاده‌اند. و افضل المهندسین مولانا غیاث الحق و الدین جمشید الکاشی ره که اصل رصد سمرقند از آثار طبع لطیف او است ملهم شده بطریق استخراج جیب یکدرجه ودرآن باب رسالهٔ انشاء نموده و مصنف (= الغ بیک) ره طریقی دیگر در باب جیب درجهٔ واحد بیان فرموده و در آن باب رسالهٔ دیگر نوشته و ما اولاً طریق تقریبی را بیان کنیم».

۲۶۳ـ بیرجندی پس از بیان دو طریق تقریبی یکی از قول صاحب «کشف الحقایق[۲]» و دیگری از قول **خواجه نصیرالدین طوسی** (در تحریر مجسطی) چنین می‌نویسد[۳] :

«و چون طریق استخراج جیب یک درجه بتقریب معلوم شد طریق استخراج

---

۱ - **بیرجندی**، شرح زیج : روی برگ ۴۰.

۲ - **«کشف الحقایق»** در شرح زیج ایلخانی از حسن بن محمد نیشابوری معروف به **نظام اعرج** است و یک نسخهٔ خطی از آن در مشهد موجود است (**فهرست رضوی** ج ۳، فصل ۱۷ ص ۲۸ ش ۱۱۴).

۳ ← **بیرجندی**، شرح زیج : پشت برگ ۴۱ سطر ماقبل آخر به بعد.

آن به برهان نیز ایراد کنیم و آن دو طریق است یکی‌آنکه سلطان المهندسین **غیاث الدین جمشید** استخراج کرده و دیگر آنکه سلطان شهید سعید مصنف ره بیان فرموده و ما این هردو را برسبیل اختصار ایراد کنیم».

«اما بجهت طریق اول (یعنی طریق **کاشانی**) فرض کنیم که قوس **ا ب ج د** شش درجه است و آن را بسه قسم متساوی کنیم برنقطه‌های **ب** و **ج** و او تار **ا ب** و**ا ج** و **ا د** و **ب ج** و **ب د** و **ج د** وصل کنیم و از جیب پانزده درجه و هیژده درجه که سابقاً معلوم شد جیب سه درجه استخراج کردیم بود[۱] :

ج ح کد لج نط لد کح ید ن (ثامنه)

پس آن را مضاعف ساختیم حاصل شد وتر[۲] **ا د**

و یو مط ز نط ح نو کط م (ثامنه)

و مطلوب معرفت وتر **ا ب** است که (وتر روبروی قوس) دو درجه است».

«پس می‌گوییم که در شکل دوم از مقالهٔ اول مجسطی مبین شده است که

---

۱ - یعنی :

$$\text{Sin}\,۳^\circ = ۳\ ;\ ۸\ ,\ ۲٤\ ,\ ۳۳\ ,\ ۵۹\ ,\ ۳٤\ ,\ ۲۸\ ,\ ۱٤\ ,\ ۵۰$$

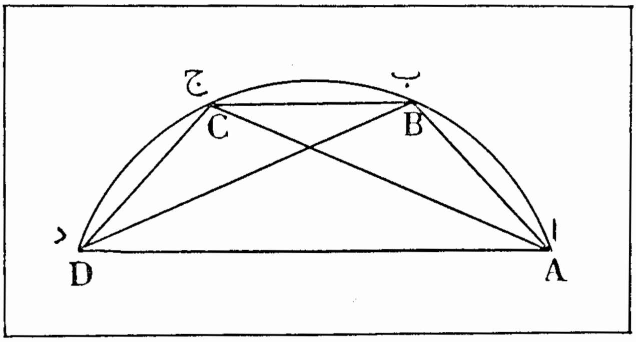
رجوع کنید به شماره‌های ۱۷۸ و ۱۹٦ کتاب حاضر.

۲ - یعنی :

$$٦\ ;\ ۱٦\ ,\ ٤۹\ ,\ ۷\ ,\ ۵۹\ ,\ ۸\ ,\ ۵٦\ ,\ ۲۹\ ,\ ٤۰$$

برای سهولت بیان دراین بخش ازکتاب این عدد را (α ثامنه)خواهیم نامید و باید متوجه بود که :

$$(\alpha\ \text{ثامنه}) = ٦ + \frac{۱٦}{٦۰} + \frac{٤۹}{(٦۰)^۲} + \frac{۷}{(۷۰)^۳} + \frac{۵۹}{٦۰^٤} + \frac{۸}{(٦۰)^۵} + \frac{۵٦}{(٦۰)^٦} + \frac{۲۹}{(٦۰)^۷} + \frac{٤۰}{(٦۰)^۸}$$



هر ذواربعة اضلاع که در دائره واقع شود مجموع دوسطح هرضلع درمقابل او مساوی سطح یکی ازدوقطر اوست دردیگری[1] وازشکل چهاردهم همان مقاله مستفاد میشود که مربع وترنصف قوسی مساوی سطح نصف قطر است در فضل قطربروترتمام اصل آن قوس تا نصف دور[2] وظاهراست که **ا ب** و **ج د** متساویند و همچنین **ا ج** و **ب د**

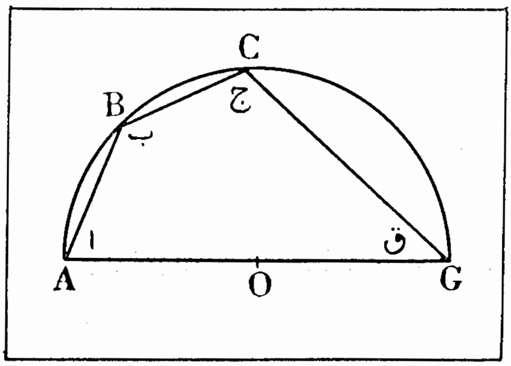
---

۱ - قضیهٔ معروف بطلمیوس در چهارضلعی محاطی :

$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$$

۲ - یعنی اگر AG قطر دایره و نقطهٔ B وسط قوس AC باشد :

$$\overline{AB^{2}} = \frac{AG}{2}(AG - GC)$$



پس حاصل‌ضرب **ا ب** در **ج د** مربع باشد که دراصطلاح اهل جبر و مقابله آنرا **مال** گویند و حاصلضرب **ب ج** که مجهول است یعنی شیء دراصطلاح جبر و مقابله در **ا د** باشد اینقدر از اشیا :

و یو مط ز نط ح نو کط م

و مجموع این دو حاصل مساوی مربع **ا ج** است یعنی سطح **ا ج** در **ب د** بحکم مقدمهٔ اولی[۱] و مربع **ا ب** مساوی سطح نصف قطراست که شصت است در فضل قطر بروتر تمام **ا ج** تا نصف دور بحکم مقدمهٔ ثانیه چه قوس **ا ج** ضعف قوس **ا ب** است[۲].

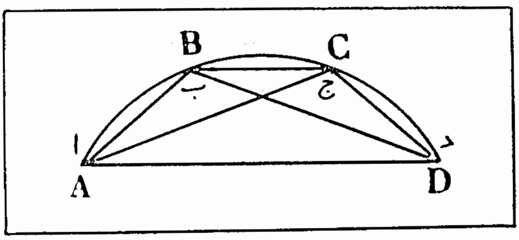
پس چون مربع **ا ب** که مال است برشصت قسمت کنند خارج قسمت جزوی

۱ - یعنی اگر فرض کنیم که قوس AD مساوی با ٦ درجه باشد و آن را در نقاط B و C به سه قسمت متساوی کنیم و :

$$AB=BC=CD$$

را x بگیریم خواهیم داشت :

$$x^۲+x\times(\text{وتر ٦ درجه})=\overline{AC}^۲=\overline{BD}^۲$$



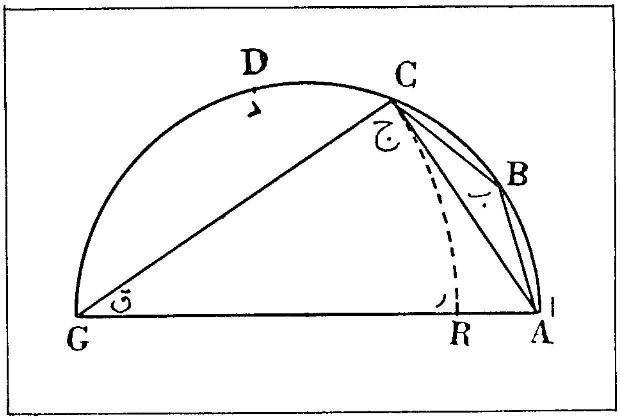
۲ - یعنی اگر از روی قطر GA طول GR را مساوی GC جدا کنیم و شعاع دایره را ٦۰ بگیریم داریم :

بقیهٔ پاورقی در صفحهٔ بعد

باشد از شصت جزو از مال و این فضل قطر است بروتر تمام(قوس) ا ج پس چون آنرا از قطر که صدوبیست جزو است نقصان کنند باقی ماند وتر تمام ا ج صدوبیست جزو الا یک جزو از شصت جزو از مال(۱) و در علم جبر و مقابله مقرر شده است که چون مربع عددی خواهند که در آن استثنا باشد اول مستثنی منه را در نفس او ضرب کنند پس مستثنی را در نفس او ضرب کنند و هردو را جمع کنند و ضعف حاصل ضرب مستثنی را در مستثنی منه از مجموع مذکور استثنا کنند(۲) پس بجهت معرفت وتر ا ج اول مربع ۱۲۰ گرفتیم بود ۱٤٤۰۰ و چون آن را مرفوع کنند چهار

بقیهٔ پاورقی از صفحهٔ قبل

$$\overline{AB^{۲}}=\frac{AG}{۲}(AG-GC)=۶۰AR$$



۱ - یعنی در شکل بالا :

$$GR=AG-AR=۱۲۰-\frac{x^{۲}}{۶۰}$$

که در آن :

$$x=AB$$

۲ - مقصود اتحاد زیر است :

$$(a-b)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab$$

مرفوع مره باشد که چهار مال است[۱] و مربع جزوی از شصت جزو از مال جزوی باشد از سه هزار و ششصد جزو از مال مال[۲] زیرا که حاصل‌ضرب جزو مال درنفس او جزو مال‌المال است و ضعف حاصل‌ضرب صدوبیست در جزوی از شصت جزو مال چهار مال است[۳]. پس مربع‌وتر تمام (قوس) ا ج چهار مرفوع مره باشد ازدرجات و جزوی از ۳۶۰۰ جزو از مال مال الا چهار مال[٤] ، وچون مربع وتر قوسی ازمربع قطر اسقاط کنند مربع وتر تمام آن قوس تا نصف دور بماند چه ازقطر و این دو وتر مثلث قائم‌الزاویه حاصل شود که وتر آن زاویهٔ قائمه قطر بود زیرا که زاویهٔ نصف دایره قائمه است چنانچه مبین شده است در ثالثهٔ اصول ، و مربع وتر قائمه مساوی مجموع دو مربع دو ضلع او است بشکل عروس[٥] ؛ و هم درعلم جبر ومقابله مقرر شده است که چون درعدد استثنا باشد و خواهند که آنرا ازعدد دیگر نقصان کنند اول مستثنی را حذف کنند و مثل مستثنی برمنقوص منه زیاده کنند پس آن عدد را

---

۱ - یعنی اگرعدد ۱٤٤۰۰ را دردستگاه شمار شصتگانی بنویسیم می‌شود ۰ , ۰ , ٤ [یعنی $٤ \times (٦٠)^٢$].

۲ - یعنی :

$$\left(\frac{x^٢}{٦٠}\right)^٢=\frac{x^٤}{٣٦٠٠}$$

۳ - یعنی :

$$٢ \times ١٢٠ \times \frac{x^٢}{٦٠}=٤x^٢$$

٤ - یعنی درشکل ذیل صفحهٔ ۲۰۷ :

$$\overline{GC^٢}=٤ \times (٦٠)^٢ + \frac{x^٤}{٣٦٠٠}-٤x^٢$$

(GC وتر تمام قوس AC است).

٥ - مقصود به کار بردن قضیهٔ فیثاغورس‌است‌در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن‌قطر دایره‌ودوضلع زاویهٔ‌قائمه‌آن‌دو وترازدایره‌باشند،و می‌خواهدبگوید که‌درشکل ذیل صفحهٔ ۲۰۷

$$\overline{AC^٢}=\overline{AG^٢}-\overline{GC^٢}$$

نقصان کنند[۱]. پس می گوئیم مربع قطر چهار مال است. پس چهار مال مستثنی است،از منقوص نقصان کردیم و برمنقوص منه که چهار مال است اضافه کردیم، پس منقوص منه هشت مال شد ، پس چون مربع وتر تمام ا ج از آن اسقاط کردیم باقی ماند مربع وتر ا ج چهار مال الا جزوی از ۳۶۰۰ جزو از مال مال[۲] و سابقاً گفتیم که مربع وتر ا ج مساوی سطح **ا ب** در **ج د** است که مال است وسطح **ب ج** در **ا د** که آن هست از اشیا این قدر:

و یو مط ز نط ح نو کط م

پس چهار مال الا جزوی از سه هزاروششصد جزو از مال مال معادل باشد با مالی و این قدر اشیا که مذکور شد[۳] ؛ و چون مستثنی از معادل اول اسقاط کنند ومثل آن

---

۱ - یعنی :

$$a-(b-c)=a+c-b$$

۲ - ظاهراً عبارت افتادگی دارد ولی مطلب کاملاً روشن است. مقصود این است که از رابطهٔ :

$$\overline{AC}^{۲}=\overline{AG}^{۲}-\overline{GC}^{۲}$$

با درنظر گرفتن اینکه :

$$AG=۱۲۰$$

و ملحوظ داشتن مقدار $\overline{GC}^{۲}$ از رابطهٔ ذیل شمارهٔ ٤ صفحهٔ ۲۰۸ حاصل می‌شود :

$$\overline{AC}^{۲}=٤x^{۲}-\frac{x^{٤}}{۳٦۰۰}$$

۳ - یعنی :

$$٤x^{۲}-\frac{x^{٤}}{۳٦۰۰}=x^{۲}+x\times(\text{ثامنه } \alpha)$$

در مورد (α ثامنه) رجوع کنید به ذیل شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۲۰۵ .

برمعادل ثانی اضافه کنند چهار مال معادل شود با یک مال و این قدر اشیا :

و یو مط ز نط ح نو کط م

و جزوی از سه هزاروششصد جزو از مال مال[۱]. و این عمل را **جبر** گویند. وچون آنچه مشترك است درمتعادلین ، وآن یک مال است، حذف کنند بماند سه مال معادل این قدر اشیا :

و یو مط ز نط ح نو کط م

ثامنه و جزوی از سه هزاروششصد جزو از مال مال[۲] و این عمل را **مقابله** گویند. وهم از قواعدآن علم است که چون در یکی ازمتعادلین کسری باشد، آن کسر تمام سازند و مثل آن برمعادل دیگر اضافه کنند و این عمل را **تکمیل** گویند. پس چون تکمیل کسر کنند دراین مقام ده هزاروهشتصد مال و آن سه مرفوع مرتین بود از مال[۳] معادل شود باین قدر اشیا :

و یو مط ز نط ح نو کط م

---

۱ - یعنی از معادلهٔ فوق نتیجه می‌شود :

$$٤x^{۲}=x^{۲}+x\times(\text{ثامنه }\alpha)+\frac{x^{٤}}{۳٦۰۰}$$

۲ - یعنی از معادلهٔ اخیر حاصل می‌شود :

$$۳x^{۲}=x\times(\text{ثامنه }\alpha)+\frac{x^{٤}}{۳٦۰۰}$$

۳ - یعنی :

$$۱۰۸۰۰x^{۲}=۳\times(٦۰)^{۲}x^{۲}$$

طرف راست در دستگاه شصتگانی چنین نوشته می‌شود :

$$(۳\,,\,۰\,,\,۰)x^{۲}$$

ساد سه و یک مال مال[۱] زیرا که چون سه را در سه هزاروششصد ضرب کنند ده هزاروهشتصد شود و چون ارقام این اعداد در سه هزاروششصد ضرب کنند هررقمی بدو مرتبه رفع شود. مثلاً سه هزاروششصد ثامنه شصت سابعه است که یک سادسه باشد و علی هذاالقیاس».

«و در همان علم مبین است که اجناس که عبارت از عدد است وشی و مال و کعب و مال مال و غیرذلک همه بریک نسبت‌اند. نسبت واحد باشی چون نسبت شی است با مال و چون نسبت مال به کعب و چون کعب با مال‌مال[۲] پس اگر اجناس را از هردو جانب، یعنی از هردو متعادلین، **منحط** گیرند درمقصود تفاوت نکند، و چون چنین کنند یعنی یکمرتبه منحط گیرند در این مقام ۳ مرفوع مرتین از اشیا معادل شود بااین عدد:

و یو مط ز نط ح نو کط م

---

۱ - یعنی اگر دوطرف معادلهٔ مذکور در ذیل شمارهٔ ۲ ص ۲۱۰ را در ۳۶۰۰ ضرب کنیم حاصل می‌شود:

$$۳ \times (۶۰)^{۲}x^{۲} = (\alpha \text{ سادسه}) \times x + x^{٤}$$

زیرا چون (α ثامنه) را در ۳۶۰۰ ضرب کنند از جنس سادسه $\left(\text{یعنی } \frac{۱}{(۶۰)^{٦}}\right)$ می‌شود و باید متوجه بود که:

$$(\alpha \text{ سادسه}) = ٦ \times (٦٠)^{۲} + ١٦ \times (٦٠) + ٤٩ + \frac{٧}{٦٠} + \frac{٥٩}{(٦٠)^{۲}}$$
$$+ \frac{٨}{(٦٠)^{۳}} + \frac{٥٦}{(٦٠)^{٤}} + \frac{٢٩}{(٦٠)^{٥}} + \frac{٤٠}{(٦٠)^{٦}}$$

۲ - یعنی:

$$\frac{۱}{x} = \frac{x}{x^{۲}} = \frac{x^{۲}}{x^{۳}} = \frac{x^{۳}}{x^{٤}}$$

سادسه و یک کعب[۱] . پس از تصرفات مذکور منتهی شد این مسئله باشیا که معادل است با عدد و کعب[۲] ، و این از شش مسئلهٔ مشهور[۳] آن علم نیست. لیکن اگر عدد و کعب برعدد اشیا قسمت کنند خارج قسمت آن شی مجهول بود[٤] چه قسمت ، تجزیهٔ مقسوم است باحاد مقسوم‌علیه. پس خارج قسمت عدد و کعب برعدد اشیا نصیب واحد باشد از مقسوم‌علیه که اشیا است».

«و بجهت آنکه کعب داخل‌قسمت شود طریق بدیع اختراع فرموده[٥] وآن چنان است که اول بعضی عدد را برعدد اشیا قسمت کرده و مکعب خارج قسمت را با باقی عدد جمع کرده پس بعضی دیگر را از عدد مجموع قسمت کرده برعدد اشیا و مکعب مجموع هردو خارج قسمت حاصل کرده و مکعب خارج قسمت اول را از این مکعب اسقاط کرده‌آنچه باقی مانده آن را با عدد مجموع جمع کرده پس بعضی دیگر از عدد مجموع ثانی‌برعدد اشیاقسمت کرده و مکعب مجموع خارجهای‌قسمت

---

۱ - یعنی اگر دو طرف معادلهٔ مذکور در ذیل شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۲۱۱ را به x تقسیم کنیم حاصل می‌شود :

$$۳ \times (٦۰)^۲ x = (\text{سادسه } \alpha) + x^۳$$

۲ - یعنی معادلهٔ مسأله به صورت :

$$ax = b + x^۳$$

درآمد.

۳ - مقصود معادلات ششگانهٔ جبری است (المسائل الست) رجوع کنید به شمارهٔ ۲۱٤ کتاب حاضر.

٤ - یعنی از معادلهٔ مذکور در ذیل شمارهٔ ۱ همین صفحه حاصل می‌شود :

$$x = \frac{(\text{سادسه } \alpha) + x^۳}{۳ \times (٦۰)^۲}$$

٥ - این قسمت مهمترین قسمت رسالهٔ «وتروجیب» است و شرح آن را بااصطلاحات کنونی بعداً خواهیم دید (← ش ۲٦۷).

را حاصل کرده و فضل این مکعب اخیر را برمکعب آن دو خارج قسمت بگرفته و آن را با باقی هم از مجموع ثانی جمع کرده، بعداز آن بعضی دیگر از مجموع ثالث قسمت کرده برعدد اشیا برهمین منوال تا بآخر عمل کرده تا از عدد مقسوم مقدار غیر معتدٌ به باقی مانده پس عمل را قطع کرده».

«و چون درنسخهٔ اصل بعضی‌ازارقام را از این عمل در جدول آورده وبعضی را ترک کرده ما این عمل را نیز از سر گرفته استخراج کردیم تا اگر ناظر را اشتباهی واقع شود رجوع بآن نماید و جدول درصفحهٔ‌آینده تحریر یافته و آنچه درجدول‌اخیر مسطور است خارج قسمت است اعنی :

ب ه لط کو کب کط کح لب ند لج

ثامنه. چون آن را تنصیف کنند حاصل آید :

ا ب مط مج یا ید مد یو کو یو »

و این جیب یک درجه است.

(پایان آنچه از شرح بیرجندی اقتباس شد).

تفسیر رسالهٔ «وتروجیب» کاشانی با اصطلاحات و علائم کنونی

۲٦٤ـ از شرحی که **بیرجندی** بررسالهٔ «وتروجیب» **کاشانی** نوشته است‌نتیجه می‌شود که مطالب رسالهٔ مذکور را می‌توان به دو جزء تقسیم کرد : یکی روش‌به دست آوردن معادلهٔ مسأله یعنی معادلهٔ :

$$x = \frac{(\text{سادسه } \alpha) + x^{۳}}{۳ \times (٦۰)^{۲}} \qquad (۱)$$

که در آن مجهول x وتر قوس دو درجه از دایره است[۱]، و یکی دیگر چگونگی حل این معادله با روش **کاشانی** که قسمت مهم و اساسی رسالهٔ مذکور است. و

۱ - در مورد مقدار (α سادسه) رجوع کنید به ذیل شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۲۱۱.

ما اینک به طور خلاصه وبااصطلاحات کنونی قبلاً چگونگی به دست آوردن معادلهٔ (۱) را بیان می کنیم و سپس به‌شرح وبیان روش کاشانی درحل آن می‌پردازیم[۱].

الف - به دست آوردن معادلهٔ (۱)

۲۶۵- نیمدایره‌ای به مرکز H و به قطر AHG مساوی با ۲۲ رسم و فرض می کنیم که :

وتررو به روی قوس دو درجه = وتر CD = وتر BC = وتر AB

(البته روی شکل اندازه‌های حقیقی درنظر گرفته نشده است).

بنابراین AD وتر قوس ٦ درجه است . کاشانی ابتدا جیب ۳ درجه را از روی تفاضل جیب ۱۸ درجه و جیب ۱۵ درجه که قبلاً آنها را می‌دانسته به دست آورده و آن‌را در ۲ ضرب کرده و وتر قوس ٦ درجه یعنی طول AD را مساوی‌باعدد زیر در دستگاه شمار شصتگانی حساب کرده است[۲] :

$$AD = (\text{ثامنه } \alpha) = ٦ \ ; \ ١٦ , ٤٩ , ٧ , ٥٩ , ٨ , ٥٦ , ٢٩ , ٤٠$$

و وتر روبروی قوس دو درجه یعنی :

$$AB = BC = CD$$

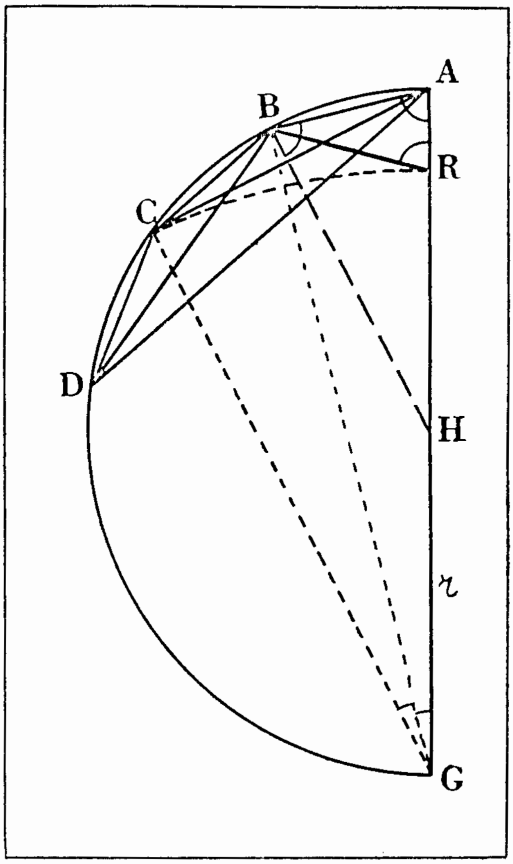
را x یعنی مجهول مسأله گرفته است و برای تشکیل دادن معادلهٔ مسئله به طریق زیر عمل کرده :

از قضیهٔ بطلمیوس در چهارضلعی محاطی ABCD حاصل می‌شود :

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

۱ - و نیز رجوع کنید به **شوی** B : ذیل صفحات ۳۸٦ تا ۳۸۹ - و **یوشکویچ** G : صفحات ۳۲۱ تا ۳۲۳.

۲ - رجوع کنید به ذیل شمارهٔ ۲ ص ۲۰۵ و قرارداد شمارهٔ ۱۷۸ کتاب حاضر.



و چون :

$$AB = BC = CD$$

و :

$$AC = BD$$

پس :

$$\overline{AB^{2}} + BC \times AD = \overline{AC^{2}}$$

یعنی :

$$x^{2} + x \times (\text{وتر شش درجه}) = \overline{AC^{2}} = \overline{BD^{2}} \qquad (۲)$$

اکنون اگر ازقطر AG طول GR را مساوی با CG جدا و پاره خطهای BG و BR

را رسم کنیم از دو مثلث متشابه ABH و ARB نتیجه می‌شود[۱] :

$$\frac{AR}{AB}=\frac{AB}{AH}$$

و از آنجا :

$$\frac{\overline{AB^{2}}}{r}=AR$$

بنابراین اگر شعاع دایره را ۶۰ واحد بگیریم داریم :

$$GR=AH-AR=120-\frac{\overline{AB^{2}}}{60} \qquad (3)$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACG با درنظرگرفتن رابطهٔ (۳) و اینکه GC=GR داریم :

$$\overline{AC^{2}}=\overline{AG^{2}}-\overline{GC^{2}}=(120)^{2}-\left(120-\frac{\overline{AB^{2}}}{60}\right)^{2}$$

یعنی :

$$\overline{AC^{2}}=4\,\overline{AB^{2}}-\frac{\overline{AB^{4}}}{3600} \qquad (4)$$

اکنون اگر در رابطهٔ (۴) مقدار $\overline{AC^{2}}$ را از رابطهٔ (۲) بگذاریم حاصل می‌شود :

۱ - این دو مثلث هردو متساوی‌الساقین هستند زیرا AH و BH شعاعهای‌دایره می‌باشند و :

$$BR=BC=AB$$

(مساوی بودن BC با BR با درنظرگرفتن اینکه BG نیمساز زاویهٔ AGC و محور تقارن چهار ضلعی BRGC است واضح می‌شود) و زوایای مجاور به قاعده درهردو مثلث متساوی‌الساقین مذکور باهم مساویند.

$$x^{۲} + x \times (\text{وتر شش درجه}) = ۴x^{۲} - \frac{x^{۴}}{۳۶۰۰}$$

که پس از تقسیم کردن طرفین بر x و ساده کردن حاصل می‌شود :

$$\text{وتر شش درجه} = ۳x - \frac{x^{۳}}{۳۶۰۰} \qquad (۵)$$

که می‌توان آن را چنین نوشت :

$$۳ \times (۶۰)^{۲} x = (\text{وتر شش درجه}) \times (۶۰)^{۲} + x^{۳}$$

اما :

$$\text{ساده}\ \alpha = (۶۰)^{۲} \times (\text{ثامنه}\ \alpha) = (۶۰)^{۲} \times (\text{وتر شش درجه})$$

پس داریم :

$$۳ \times (۶۰)^{۲} x = (\text{ساده}\ \alpha) + x^{۳}$$

و از آنجا :

$$x = \frac{(\text{ساده}\ \alpha) + x^{۳}}{۳ \times (۶۰)^{۲}} \qquad (۱)$$

و این همان معادله‌ای است که می‌خواستیم (یعنی معادلهٔ مسأله).

۲۶۶- تبصره - چون در استدلال فوق هیچ جا از مقدار عددی AB=x که وتر روبروی قوس دو درجه است استفاده نکردیم می‌توانیم به طور کلی x را وتر روبروی قوس ۲a درجه و AD را، که در حالت خاص مساوی با وتر قوس شش درجه اختیار شده است، وتر روبروی قوس ۶a درجه فرض کنیم. در این صورت با درنظر گرفتن اینکه شعاع دایره را ۶۰ واحد گرفته‌ایم حاصل می‌شود :

$$AB = ۲ \times ۶۰ \sin a = ۱۲۰ \sin a$$

و

$$AD = ۲ \times ۶۰ \sin ۳a = ۱۲۰ \sin ۳a$$

و چون این مقادیر را در معادلهٔ (٥) قرار دهیم حاصل می‌شود :

$$۱۲۰ \sin ۳a = ۳ \times ۱۲۰ \sin a - \frac{(۱۲۰ \sin a)^{۳}}{۳۶۰۰}$$

و یا پس از اختصار :

$$\sin ۳a = ۳ \sin a - ٤ \sin^{۳} a$$

و این همان اتحاد مثلثاتی معروف است که $\sin ۳a$ را برحسب $\sin a$ به دست می‌دهد و **کاشانی** آن را در حالت خاص ثابت کرده و به کار برده است.

ب - روش کاشانی در حل معادله (۱)

۲٦۷- اکنون می‌پردازیم به شرح روش بدیع و جالب توجهی که **کاشانی** برای حل معادلهٔ (۱) اختراع کرده[۱] و **بیرجندی** آن را نقل کرده است ومطالب را طوری بیان می‌کنیم که کسانی هم که با محاسبه در دستگاه شصتگانی آشنایی ندارند از عهدهٔ فهم آن برآیند.

معادلهٔ :

$$x = \frac{(\alpha \text{ سادسه}) + x^{۳}}{۳ \times (٦۰)^{۲}} \qquad (۱)$$

را برای سهولت بیان به شکل کلی زیر می‌نویسیم :

$$x = \frac{q + x^{۳}}{p} \qquad (۱)'$$

۱ - این روش به وجوه مختلف در منابع زیر مورد بحث و بررسی قرار گرفته است : **سدیو** A : صفحات ۳۰۵ و ۳۰٦ - **سدیو** P : صفحات ۸۲ تا ۸۳ (همان مطالب سدیو A است) - **ویکه** D : صفحات ۱٦۷ تا ۱۷٦ (بحثی است مفصل و در آن از سلسله‌ها استفاده شده) - **هانکل** G : صفحات ۲۸۹ تا ۲۹۳ - **آبو** : صفحات ۲٤ تا ۲۹ (بهترین و روشنترین شرحی است که دراین باره نوشته شده ودرآن محاسبات در دستگاه شصتگانی صورت گرفته است) - **یوشکویچ** G : صفحات ۳۲۱ تا ۳۲٤.

و فراموش نمی‌کنیم که در مسألهٔ مورد بحث اعداد p و q در دستگاه شمار شصتگانی چنین نوشته می‌شوند :

$$p=۳\,,\,۰\,,\,۰$$

یعنی در واقع :

$$p=۳\times(۶۰)^{۲}$$

و :

$$q=۶\,,\,۱۶\,,\,۴۹\;;\;۷\,,\,۵۹\,,\,۸\,,\,۵۶\,,\,۲۹\,,\,۴۰$$

یعنی در دستگاه اعشاری :

$$q=۶\times(۶۰)^{۲}+۱۶\times(۶۰)+۴۹+\frac{۷}{(۶۰)}+\frac{۵۹}{(۶۰)^{۲}}+\frac{۸}{(۶۰)^{۳}}+\frac{۵۶}{(۶۰)^{۴}}+\frac{۲۹}{(۶۰)^{۵}}+\frac{۴۰}{(۶۰)^{۶}}$$

اکنون فرض می‌کنیم که جواب معادلهٔ $(۱)'$ در دستگاه شصتگانی به صورت :

$$x=a+b+c+\cdots$$

باشد که در آن a و b و c و ... **ارزش نسبی** ارقام شصتگانی عدد x هستند[۱] . باید a و b و c و ... را یکی پس از دیگری تعیین کنیم .

چون x وتر روبروی قوس ۲ درجه است ، مقدار آن نسبت به شعاع دایره که

---

۱ - همانگونه که مثلاً در دستگاه دهگانی عدد ۳۲٫۴۷۶ را می‌توان چنین نوشت :

$$۳\times۱۰+۲+\frac{۴}{۱۰}+\frac{۷}{(۱۰)^{۲}}+\frac{۶}{(۱۰)^{۳}}$$

و آن را به صورت $a+b+c+d+e$ نشان داد . در اینجا مثلاً :

$$e=\frac{۶}{(۱۰)^{۳}}\quad\text{و}\quad d=\frac{۷}{(۱۰)^{۲}}\quad\text{و}\quad c=\frac{۴}{۱۰}$$

۶۰ فرض می‌شود کوچک است و مکعب آن یعنی $x^۳$ بسیار کوچک است و می‌توان در تقریب اول از مکعب آن (که باید در معادلهٔ اصلی بر ۲۶۰×۳ نیز تقسیم شود) صرف‌نظر کرد و x را تقریباً مساوی با $\frac{q}{p}$ گرفت. پس نخستین مقدار تقریبی x که آن را $x_۱$ می‌نامیم عبارت است از:

$$x_۱ = \frac{q}{p} \approx a$$

به این طریق معلوم می‌شود که[۱]:

$$x_۱ = \frac{۶\times(۶۰)^۲ + ۱۶\times(۶۰) + ۴۹ + \cdots}{۳\times(۶۰)^۲} \qquad (۶)$$

$$= ۲ + \frac{۱۶\times(۶۰) + ۴۹ + \cdots}{۳\times(۶۰)^۲}$$

یعنی ارزش نسبی نخستین رقم شصتگانی x مساوی با ۲ درجه (واحد) است.

اینک که نخستین رقم شصتگانی x یعنی a را یافتیم برای تعیین ارزش نسبی دومین رقم آن در طرف چپ معادلهٔ $(۱)'$ به جای x مقدار $a+b+\cdots$ را که به حقیقت نزدیکتر است و در طرف راست آن مقدار تقریبی a را قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود:

$$a+b+\cdots = \frac{q+a^۳}{p}$$

و از آنجا[۲]:

$$b+\cdots = \frac{q-ap+a^۳}{p}$$

۱ - توجه کنید که اگر صورت کسر $x_۱$ را در دستگاه شصتگانی برمخرج آن تقسیم کنیم خارج قسمت ۲ و باقیمانده، صورت آخرین کسر طرف راست رابطهٔ (۶) است.

۲ - پس b از تقسیم کردن $q-ap+a^۳$ بر p معین می‌شود. باقیماندهٔ این تقسیم یعنی $(q-ap+a^۳)-bp$ بعداً به کار خواهد آمد.

یعنی[1] :

$$b+\cdots=\frac{[6\times(60)^2+16\times(60)+49+\cdots]-[2\times3\times(60)^2]+(2)^3}{3(60)^2}$$

$$\approx\frac{16\times(60)+49+\cdots}{3\times(60)^2}=\frac{5}{(60)}+\frac{1\times(60)+49+\cdots}{3\times(60)^2} \qquad (7)$$

یعنی ارزش نسبی دومین رقم شصتگانی x مساوی $\frac{5}{60}$ یعنی ۵ دقیقه است.

پس دومین مقدار تقریبی x که آن را x_2 می‌نامیم تعیین شد :

$$x_2=a+b$$

برای تعیین ارزش نسبی سومین رقم شصتگانی x این بار درطرف چپ معادله $(1)'$ به جای x مقدار $a+b+c+\cdots$ را که به حقیقت نزدیکتر است و در طرف‌راست آن مقدار تقریبی $a+b$ را قرار می‌دهیم حاصل می‌شود :

$$a+b+c+\cdots=\frac{q+(a+b)^3}{p}$$

و از آنجا :

$$c+\cdots=\frac{q+(a+b)^3-(a+b)p}{p}$$

که می‌توان آن را چنین نوشت[2] :

$$c+\cdots=\frac{(q-ap+a^3)-bp+[(a+b)^3-a^3]}{p}$$

---

۱ - توجه کنید که اگر در دستگاه شصتگانی صورت کسر $b+\cdots$ را برمخرج آن تقسیم کنیم خارج قسمت ۵ دقیقه و باقیمانده ، صورت آخرین کسر طرف راست رابطهٔ (۷) است.

۲ - از این رو قاعده‌ای که **بیرجندی** از قول **کاشانی** نقل کرده است واضح می‌شود. (← صفحهٔ ۲۱۲ کتاب حاضر از سطر ششم به‌بعد) .

علت اینکه مقدار $c+\cdot\cdot\cdot$ را به شکل فوق درآوردیم این است که مقدار :

$$(q-ap+a^{۳})-bp$$

را که باقیماندهٔ تقسیم $q-ap+a^{۳}$ بر p است قبلاً حساب کرده‌ایم (رجوع شود به ذیل شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۲۰۲ وذیل شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۲۲۱) وکافی است که $(a+b)^{۳}-a^{۳}$ راحساب کنیم وبرآن بیفزاییم وسپس حاصل را بر p تقسیم کنیم تا ارزش نسبی رقم c به دست آید. این بار پس از محاسبه معلوم می‌شود که :

$$c=\frac{۳۹}{(۶۰)^{۲}}$$

پس سومین مقدار تقریبی x که آن را $x_{۳}$ می‌نامیم تعیین شد :

$$x_{۳}=a+b+c$$

با همین روش می‌توان ارزش نسبی سایر ارقام شصتگانی x را تا هرجا بخواهیم حساب کرد[1] و به این ترتیب حاصل می‌شود :

$$x_{۱}=a$$

$$x_{۲}=\frac{q+a^{۳}}{p}=\frac{q+(x_{۱})^{۳}}{p}$$

$$x_{۳}=\frac{q+(a+b)^{۳}}{p}=\frac{q+(x_{۲})^{۳}}{p}$$

. . . .

. . . .

بالاخره :

$$x_{n}=\frac{q+(x_{n-۱})^{۳}}{p}$$

۱ - بیرجندی چگونگی همهٔ این محاسبات را درطی جدولی درشرح زیج‌الغ بیک (پشت برگ ۴۳) ثبت کرده است.

و عمل را تا هراندازه که بخواهیم می‌توانیم ادامه دهیم. در هرعمل فقط باید مقدار تقریبی x را که در عمل ماقبل آن به دست آورده‌ایم به قوهٔ ۳ رسانده و یک عمل تقسیم انجام دهیم.

۲٦۸ـ مزیت روش **کاشانی** برروشهای دیگر محاسبهٔ جیب یک درجه، که اصل آنها از بطلیموس است،این است که در آن روشها دقتی که می‌توان درمحاسبه به دست‌آورد محدوداست ومحاسبات فوق‌العاده پیچیده وطولانی است[۱] درصورتیکه چنانکه گفتیم، در روش **کاشانی**، اولاً در هرعمل فقط یک بار عمل به قوهٔ سه رساندن ویک بارعمل تقسیم لازم است و ثانیاًعمل راتاهردرجه‌از دقت که‌بخواهیم می‌توانیم ادامه دهیم.

۲٦۹ـ کاشانی باروش‌فوق وتر روبروی قوس دو درجه‌را دردستگاه‌شصتگانی تا رقم تا سعهٔ آن به شرح زیر حساب کرده است:

وتر روبروی قوس دو درجه = ۲ ; ۵ , ۲۹ , ۲٦ , ۲۲ , ۲۹ , ۲۸ , ۳۲ , ۵۲ , ۳۳

و آن را نصف کرده و جیب یک درجه را به دست آورده است:

جیب یک درجه = $60 \sin 1^\circ$ = ۱ ; ۲ , ٤۹ , ٤۳ , ۱۱ , ۱٤ , ٤٤ , ۱٦ , ۲٦ , ۱۷

۲۷۰ـ اگر مقدار مذکور جیب یک درجه را به ٦۰ تقسیم کنیم و حاصل را در دستگاه شمار دهگانی بنویسیم سینوس یک درجه با ۲۲ رقم اعشاری به دست می‌آید:

$\sin 1^\circ =$ ۰ , ۰۱۷ ٤۵۲ ٤۰٦ ٤۳۷ ۲۸۳ ۵۱۰ ۳۷۱ ۲

که هفده رقم اعشاری آن با مقدار واقعی سینوس یک درجه موافق است.

۲۷۱ـ در پایان این بخش عقیدهٔ **یوشکویچ** را دربارهٔ روش **کاشانی** درمحاسبهٔ

---

۱ ← **آبو**: ص ۲٤.

جیب یک درجه از کتاب تاریخ ریاضیات وی می‌آوریم[1] : «**روش کاشانی در حل عددی معادلات جبری، از حیث شایستگی، مانند کارهای خیام در بارهٔ نظریهٔ کلی معادلات درجهٔ سوم، سرآمد آثار ریاضیدانان دورهٔ اسلامی است**[2]».

۱ - یوشکویچ G : ص ۳۲۳.

۲ - و نیز رجوع کنید به شمارهٔ ۲۲ کتاب حاضر . در آنجا عقیدهٔ **لوکی** را دربارهٔ رسالهٔ وتروجیب خواهید یافت.

بخش ششم

کاشانی نخستین مخترع کسرهای اعشاری است

مفهوم کسرهای اعشاری پیش از عصر کاشانی

۲۷۲ ـ بارها دیده شده است که مدتها پیش از آنکه اختراع یا کشف مهمی دربارهٔ موضوع معینی صورت گیرد، دانشمندانی بوده‌اند که دربارهٔ آن موضوع الهام کم و بیش مبهمی داشته‌اند. درمورد کسرهای اعشاری نیز قبل از آنکه **کاشانی** در اوایل قرن نهم هجری (نیمهٔ اول قرن پانزدهم میلادی)، چنانکه خواهیم دید، به‌وجهی روشن و صریح کسرهای اعشاری را وضع و تعریف کند وآگاهانه آنها رادر محاسبات خود به کاربندد، دانشمندان دیگری احتیاج به‌وجود چنین کسرهایی را حس می‌کرده‌اند وبه‌طور ناخودآگاه‌آنهارا به کار می‌برده‌اند.

۲۷۳ ـ نخستین بارکه در تاریخ ریاضیات به‌مفهوم کسرهای اعشاری ویا بهتر بگوییم به‌نطفهٔ این مفهوم برمی‌خوریم در کتاب‌مختصری است موسوم به «مقالة فیما یحتاج الیه من الحساب الهندی فی صناعة النجوم» تألیف **کوشیاربن لبان گیلانی** ریاضیدان ومنجم ایرانی که در نیمهٔ دوم قرن چهارم و احیاناً در اوایل قرن پنجم هجری می‌زیسته است. یک نسخه ازاین کتاب به‌شمارهٔ ۲۰۹۲/٤ در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران موجود است(۱).

---

۱ ـ یک نسخهٔ دیگر نیز از این کتاب باعنوان «کتاب فی اصول حساب اللهند» در کتابخانهٔ ایا صوفیا دراستانبول به‌شمارهٔ ٤٨٥٧ موجود است که متن عربی و ترجمهٔ انگلیسی آن به‌چاپ رسیده است (← **لوی و پتروک**). این دونسخه باهم تفاوتهای زیادی دارند ونسخهٔ دانشگاه تهران ازبرخی جهات اصیل‌تراست. آنچه درمتن کتاب حاضر ازکتاب **کوشیار** نقل کرده‌ام از نسخهٔ دانشگاه تهران استخراج شده‌است واین مطالب درنسخهٔ موجود در ایا صوفیا وجودندارد.

کوشیار درباب هشتم این کتاب می‌نویسد(۱) : «برای گرفتن جذر به‌وسیلهٔ صفرها (استخراج‌الجذر بالاصفار) عددی را که می‌خواهیم جذر آن را بگیریم می‌نویسیم و درسمت‌راست آن یک عدهٔ زوج‌صفر می‌گذاریم وهرچه عدهٔ‌صفرها بیشتر باشدجذر دقیقتر خواهدبود. سپس جذر را استخراج می‌کنیم و به‌باقیماندهٔ‌آن‌اهمیت نمی‌دهیم واز طرف راست جذر به‌نصف عدهٔ صفرهایی‌که قبلاً درسمت راست عدد گذاشته بودیم‌رقم کنار می‌گذاریم، آنچه‌باقی‌ماند(قسمت‌صحیح)جذر مطلوب‌است. سپس ارقامی‌راکه‌کنارگذاشته‌ایم در ٦۰ ضرب می‌کنیم و از سمت راست حاصل به‌نصف عدهٔ صفرهای مذکور رقم کنار می‌گذاریم‌آنچه در سمت چپ باقی‌ماند کسر (= دقیقه‌های)جذر خواهدبود. باز ارقامی‌را‌که (دربار‌دوم) کنارگذاشته‌بودیم در ٦۰ضرب می‌کنیم وازطرف راست عدد حاصل به‌نصف عدهٔ‌صفرهای‌مذکور رقم کنار می‌گذاریم‌آنچه‌ماند کسرکسر (=ثانیه‌های) جذر خواهدبودوعمل راادامه‌می‌دهیم تاهمهٔ ارقامی‌که باید ازسمت راست کنار بگذاریم صفر شوند»

کوشیارگیلانی ازعدد ۲٤ به‌طریق زیر مطابق با قاعدهٔ فوق‌جذر تقریبی استخراج کرده است :

$$\sqrt{۲٤} = \frac{۱}{۱۰۰}\sqrt{۲٤۰۰۰۰} \approx \frac{۱}{۱۰۰} \times ٤۸۹$$

سپس از دورقم سمت‌راست عدد ٤۸۹ صرف‌نظر کرده وقسمت صحیح جذر را مساوی

۱ ـ نسخهٔ خطی پشت برگ ۳۳ «الجذر بالاصفار ، نضع المال‌المجذور (ونقدم)قبله‌اصفارا عددها زوج وکلما کانت‌الاصفار اکثر کان‌الجذر ادق. ثم نستخرج جذره ولاتعنا بما تفضل منه ونعزل من مراتب‌الحاصل بعدد نصف الاصفار المقدمه وما‌بقی‌منهافهوالجذر. ثم‌نضرب المراتب‌المعزولة فی‌ستین‌ونعزل من‌مراتب‌المبلغ بعدد نصف‌الاصفار المقدمه وما‌بقی‌فهو کسور الجذر. ثم‌نضرب‌المراتب‌المعزولة ایضافی‌ستین و نعزل من‌مراتب‌المبلغ بعدد نصف‌الاصفار المقدمه و ما‌بقی فهو کسورالکسور. و نعمل کذلک الی‌ان‌تصیرالمراتب التی نعزلهااصفاراً کلها».

با ٤ گرفته است. یعنی در واقع $\frac{٤٨٩}{١٠٠}$ را به ٨٩ر٠ + ٤ تجزیه کرده و ٤ را که قسمت صحیح جذر است بیرون آورده. آنگاه برای تعیین قسمت کسری جذر، چون هنوز کسرهای اعشاری اختراع نشده‌بوده، $\frac{٨٩}{١٠٠}$ را به‌دستگاه شصتگانی برده وآن را معادل با ٥٣ دقیقه و ٢٤ ثانیه یافته است:

$$\sqrt{٢٤} = ٤^{\circ} + ٥٣' + ٢٤'' = ٤ + \frac{٥٣}{٦٠} + \frac{٢٤}{(٦٠)^{٢}}$$

از آنچه گذشت کاملاً هویداست که **کوشیار گیلانی** به‌وجهی ناخودآگاه مفهوم کسرهای اعشاری را به کار بسته است.

کوشیار گیلانی نظیر همین قاعده را برای گرفتن کعب درباب دوازدهم کتاب مذکور بیان کرده وآن را «استخراج الکعب بالاصفار» نامیده است.

بعداز **کوشیار گیلانی** همین استخراج جذر و کعب به‌وسیلهٔ صفرها، یعنی درواقع به‌کاربستن مفهوم کسرهای‌اعشاری، در دو کتاب حساب دیگر نیز دیده می‌شود: یکی«کتاب شمارنامه» (به‌فارسی) تألیف **حاسب‌طبری** (محمدبن ایوب)ویکی دیگر «کتاب‌المقنع فی‌الحساب‌الهندی» (به‌عربی) تألیف **نسوی** (ابوالحسن‌علی‌بن‌احمد) است که ابتدا آن را به‌فارسی نوشته بود و بعد خود آن را به‌عربی برگرداند و این هردومؤلف نیز ایرانی و از ریاضیدانان قرن پنجم هجری بوده‌اند.

۲۷٤ ـ «شمارنامه» تا آنجا که اطلاع داریم هنوز توسط محققان مغرب زمین مورد بررسی قرار نگرفته و درچاپی هم که از آن درایران به‌عمل آمده است مطالب مهم ریاضی آن مورد توجه قرار نگرفته و چنانکه باید مورد تفسیر واقع نشده (و در بسیاری از مواضع مغلوط چاپ شده) است. عنوان بابهای چهاردهم و پانزدهم از فصل‌سوم«شمارنامه» به‌ترتیب «درجذر گرفتن به‌اصفار» و«در کعب گرفتن به‌اصفار»

است [۱] و خلاصهٔ فصل چهاردهم آن این است که اگر بخواهیم جذر تقریبی عدد اصمی را با دقت‌بیشتری بگیریم باید یک عدهٔ زوج (مثلاً ۲ یا ٤ یا ٦ وغیره) صفر درسمت‌راست آن عدد بگذاریم [۲] واز عدد حاصل، مطابق با قاعدهٔ معمول، جذر تقریبی تا یک واحد بگیریم واز باقیماندهٔ جذر صرف‌نظر کنیم ، آن‌گاه به‌عدهٔ نصف صفرهایی که قبلاً درسمت راست عدد گذاشته بودیم از سمت راست جذر رقم جدا کنیم ، آنچه درسمت چپ‌ماند قسمت صحیح جذر مطلوب است.

حاسب طبری به‌عنوان‌مثال از عدد ٥ درجه به‌طریق زیر جذر استخراج کرده :

$$\sqrt{٥} = \frac{١}{١٠٠٠}\sqrt{٥٠٠٠٠٠٠٠} \approx \frac{١}{١٠٠٠} \times ٢٢٣٦$$

سپس از سه‌رقم سمت راست عدد ٢٢٣٦ صرف‌نظر کرده و قسمت صحیح جذر را مساوی با ۲ گرفته‌است یعنی در واقع $\frac{٢٢٣٦}{١٠٠٠}$ را به ٢٣٦ر٠ + ٢ تجزیه کرده و ۲ را که قسمت صحیح جذر است گرفته وآنگاه برای تعیین قسمت کسری جذر ، چون هنوز کسرهای اعشاری اختراع نشده‌بوده ، $\frac{٢٣٦}{١٠٠٠}$ رابه‌دستگاه‌شصتگانی‌برده‌وآن رامعادل با ١٤ دقیقه و ٩ ثانیه و ٣٦ ثالثه یافته است :

$$\sqrt{٥^{\circ}} = ٢^{\circ}\,,\,١٤'\,,\,٩''\,,\,٣٦''' = ٢ + \frac{١٤}{٦٠} + \frac{٩}{(٦٠)^٢} + \frac{٣٦}{(٦٠)^٣}$$

از آنچه گذشت کاملاً هویداست که **حاسب طبری** نیز به‌وجهی ناخودآگاه مفهوم کسرهای اعشاری را بکار بسته‌است.

---

١ ← **شمارنامه** ، صفحات ١٠٥ تا ١٠٨ (درصفحهٔ ١٠٦ شمارنامهٔ چاپی اعداد ٠٢١ و ١٤١ سطرهای هشتم ونهم غلط است وباید ٠٢ و ١٤ باشد).

٢ ـ به‌همین علت است که این روش را «جذرگرفتن به‌اصفار» نامیده است . ضمناً خاطرنشان کرده که هرچه عدهٔ صفرها بیشتر باشد جذر دقیقتر خواهد بود.

همچنین **طبری** درباب پانزدهم فصل سوم «شمارنامه» از عدد ۱۲ درجه بطریق زیر کعب گرفته است[۱] :

$$\sqrt[3]{۱۲} = \frac{۱}{۱۰۰}\sqrt[3]{۱۲۰۰۰۰۰۰} \approx \frac{۱}{۱۰۰} \times ۲۲۸ = ۲^{\circ}, ۱۶', ۴۸''$$

یعنی در واقع کعب ۱۲ را ۲٫۲۸ یافته و کسر اعشاری ۰٫۲۸ رابه کسر شصتگانی تبدیل کرده است .

۲۷۵ ـ **واما نسوی** درباب‌ششم از مقالهٔ چهارم کتاب «المقنع»[۲] که‌عنوان‌آن «فی‌جذر الدرج والدقائق ومادونهامن الکسور» و موضوع آن استخراج‌جذر کسرهای شصتگانی است ، همان روش «جذر گرفتن به‌اصفار» را به کار برده و آن‌را «استخراج الجذر بالاصفار» نامیده و به‌عنوان مثال از عدد ۱۷ درجه به‌طریق زیر جذر گرفته است.

$$\sqrt{۱۷^{\circ}} = \frac{۱}{۱۰۰}\sqrt{(۱۷۰۰۰۰)^{\circ}} \approx \frac{۱}{۱۰۰} \times ۴۱۲^{\circ} = ۴^{\circ}, ۷', ۱۲''$$

یعنی در واقع جذر ۱۷ را مساوی‌با ۴٫۱۲ یافته‌وقسمت کسری ۰٫۱۲ را به کسرهای شصتگانی‌تبدیل کرده واوهم به‌وجهی ناخودآگاه مفهوم کسرهای‌اعشاری را به کار بسته است .

۲۷۶ ـ روش جذرگرفتن به‌اصفار را که **حاسب‌طبری** و **نسوی** به کار برده‌اند باعلائم واصطلاحات کنونی به‌وسیلهٔ دستور زیر می‌توان بیان کرد :

$$\sqrt{a} = \frac{۱}{(۱۰)^{n}}\sqrt{a \times (۱۰)^{۲n}}$$

---

۱ ← **شمارنامه**، ص ۱۰۷

۲ ← نسخهٔ خطی شمارهٔ (Warn) 556 کتابخانهٔ لیدن **پشت برگ** ۷۸

و روش کعب گرفتن به‌اصفار **حاسب طبری** چنین بیان می‌شود :

$$\sqrt[۳]{a} = \frac{۱}{(۱۰)^{n}}\sqrt[۳]{a\times(۱۰)^{۳n}}$$

۲۷۷ ـ این نکته را هم ناگفته نگذاریم که روش‌جذر گرفتن به‌اصفار درترجمهٔ لاتینی یک کتاب عربی شناخته نشده که درنیمهٔ اول قرن دوازدهم میلادی صورت گرفته نیز دیده شده است(۱).

اما در آثار ریاضیدانان‌اروپایی نخستین‌بار دوقرن بعداز **حاسب‌طبری و نسوی** یعنی درنیمهٔ اول قرن سیزدهم میلادی درکتاب Algorithmus demonstratus تألیف Jordanus به‌این روش برمی‌خوریم. اصل اسلامی این روش احیاناً به‌قبل از عهد **طبری و نسوی** می‌رسد (اگر از زمان **خوارزمی** شروع نشده باشد(۲)).

۲۷۸ ـ **نسوی** همان‌روش‌مذکور درشمارهٔ ۲۷۶ را دربارهٔ کسرهای‌شصتگانی نیز بکار برده و برای استخراج جذر ۲۶ درجه و ۱۷ دقیقه چنین عمل کرده‌است(۳).

$$\sqrt{۲۶^{\circ}۱۷'} = \frac{۱}{۶۰}\sqrt{(۲۶^{\circ}\ ۱۷')\times(۶۰)^{۲}} = \frac{۱}{۶۰}\sqrt{۹۴۶۲۰''}$$

$$= \frac{۱}{۶۰}\times ۳۰۷' = ۵^{\circ}\ ۷'$$

اما به‌کار بردن این روش دربارهٔ کسرهای شصتگانی مدتها قبل از **طبری و نسوی** وبازهم توسط ریاضیدانان ایرانی صورت گرفته است :

درپایان کتاب «معرفة مساحة‌الاشکال» تألیف **بنوموسی** وتحریر **خواجه نصیر**

---

۱ ← **سارتن** F

۲ ← **سارتن** F و **سوتر** U ، ص ۱۱۹

۳ ← ذیل شمارهٔ ۲ ص ۲۲۹

الدین طوسی[۱] که به زبان عربی است ، درضمن شکل(= قضیهٔ) هجدهم که مربوط به تثلیث زاویه است مطلب زیر دیده می‌شود[۲] :

«پس از این باید طریق به‌دست آوردن کعب تقریبی را بیان کنیم تا بتوانیم آن را در مورد لزوم درمحاسبه به کاربریم و روشی اختیار کنیم که بزرگترین تقریب ممکن از آن به‌دست آید . یعنی اگر بخواهیم که تفاوت بین کعب تقریبی و کعب حقیقی مثلاً کمتر از یک دقیقه یا یک ثانیه باشد بتوانیم آن را حساب کنیم . روش عمل از این قراراست : مکعب را به اجزا یعنی ثالثه‌ها یاسادسه‌ها یا تاسعه‌ها وغیره تبدیل می‌کنیم واگر آن عدد مکعب کامل بود کعب آن را استخراج می‌کنیم والا نزدیکترین عدد مکعب به عدد مفروض را می‌یابیم و کعب آن را می‌گیریم . اگر اجزای عدد مفروض برحسب ثالثه باشد کعب از جنس دقیقه است و اگر برحسب سادسه باشد کعب از جنس ثانیه خواهد بود وبه‌این ترتیب مسائل حل می‌شود» .

به‌طور خلاصه یعنی برای استخراج کعب از عدد a که در دستگاه شصتگانی نوشته شده است بطریق زیر عمل می‌کنیم :

$$\sqrt[۳]{a} = \frac{۱}{(۶۰)^n}\sqrt[۳]{a \times (۶۰)^{۳n}}$$

و ملاحظه می‌شود که درمثالی که درآغاز این شماره از **نسوی** آوردیم کعب به همین روش استخراج شده است .

---

۱ ← درجزو رسائل **طوسی** درحیدرآباد دکن به‌سال ۱۰۳۹ ه.ق. چاپ شده (صفحهٔ ۲۰) .

۲ ـ « ینبغی‌لناان نصف بعدذلک تقریب ضلع المکعب لینطبق ... » ـ این عبارت را **کارادوو** به فرانسوی ترجمه کرده (← **کارادوو** U) وهمهٔ کتاب «معرفةمساحةالاشکال» **بنوموسی** را **سوتر** به‌آلمانی برگردانده است (← **سوتر** G) ـ ما عبارات‌فوق را طوری به‌فارسی برگردانده‌ایم که برای خواننده به‌آسانی قابل فهم باشد .

اختراع کسرهای اعشاری توسط کاشانی

۲۷۹ ـ پیش از آنکه اروپاییان با «رسالهٔ محیطیه» و کتاب «مفتاح الحساب» **کاشانی** آشنایی پیدا کنند در کتابهای تاریخ ریاضیات اختراع کسرهای اعشاری را معمولاً به **سیمون استون** بلژیکی (اشتفین Simon Stevin) درسال ۱۵۸۵ میلادی و **بورگی** سویسی (Bürgi) درحدود سال ۱۵۹۲ میلادی و **ویت** فرانسوی (Viète) که از ۱۵٤۰ تا ۱٦۰۳ می‌زیست ودیگران نسبت می‌دادند[۱]

نخستین بار **پاول لوکی** آلمانی در کتابی که درسال ۱۹٤٤ دربارهٔ «مفتاح الحساب» نوشت ودرسال ۱۹۵۱ به‌چاپ رسید[۲] به‌جهانیان اعلام کرد که کسرهای اعشاری را نخستین بار **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** ریاضیدان ایرانی درسال ۱٤۲۳ میلادی یعنی درحدود یک‌قرن‌ونیم قبل از اروپاییان اختراع کرده است و چنانکه پیش از این هم گفتیم خانم **نائله رجائی** درسال ۱۹۵۱ میلادی رسالهٔ پایان نامهٔ دکترای خود را در دانشگاه آمریکایی بیروت دربارهٔ، اختراع کسرهای اعشاری توسط **کاشانی**، نوشت[۳] .

۲۸۰ ـ اینک برای روشن شدن موضوع اختراع کسرهای اعشاری توسط **کاشانی** ترجمهٔ آزاد فارسی مطالبی چند از کتاب «مفتاح الحساب» و رسالهٔ محیطیهٔ وی را که در آنها به‌اختراع این کسرها و چگونگی ملهم شدن او به‌آنها اشاره شده است ذکر می‌کنیم تابتوانیم بااستناد به‌آنها بحث را دنبال کنیم[٤] . **کاشانی** درباب اول از مقالهٔ سوم «مفتاح الحساب» درضمن تعریف کسرهای شصتگانی

---

۱ ـ ونیز رجوع کنید به **قربانی** : نخستین مخترع ، ص ۷٤۸

۲ ← **لوکی** R

۳ ← **رجائی** : رساله

٤ ـ درتهیهٔ این قسمت ، ازکتاب **لوکی** R بسیار استفاده کرده‌ام

می‌نویسد[۱] : «همانگونه که درحساب باارقام هندی (=شمار دهگانی) هربار ۱۰ را مرفوع کرده به‌طرف چپ می‌بریم[۲] دراینجا هربار ۶۰ را مرفوع کرده به‌طرف راست می‌بریم[۳] وهمانگونه که در آنجا نخستین مرتبهٔ اعداد صحیح **یکان** نامیده می‌شود در اینجا **درجات**، به‌اسم مکان، خوانده می‌شود و همانگونه (= بااین تفاوت) که آنجا سلسلهٔ مراتب یکی است (اما) اینجا دوسلسله هست که یکی درطرف صعود و دیگری درطرف نزول است و درجات بین دوسلسله قرار دارند **وما آنجا نیز دوسلسله وضع کردیم به‌قسمی که همهٔ مرتبه‌های هردوسلسله به‌یک نسبت هستند** »

از مطالب فوق نتیجه می‌شود که تا زمان **کاشانی** عدد نویسی در دستگاه‌شمار دهگانی فقط منحصر به‌نوشتن عددهای صحیح بوده وکسرهای دهگانی وجودنداشته است. اما می‌دانیم که کسرهای شصتگانی موجود بوده وآنها را در دنبال عددهای صحیح از راست به‌چپ می‌نوشته‌اند و درجات حد فاصل بین مرتبه‌های صحیح و مرتبه‌های کسری بوده است مثل :

---

۱ ← **مفتاح**، ص ٦٤ : « فکماان‌فی‌الحساب بالارقام الهندیة یرفع بکل‌عشرة الی الیسار فهیهنا یرفع بکل ستین الی‌الیمین وکماان هناك یسمی اول مراتب‌الصحاح بالاحاد فهیهنا یسمی بالدرج باسم‌المکان وکماان‌سلسلة المراتب هناك کانت واحدة فهیهنا سلسلتان احدیهمافی‌جانب‌الصعود والاخری‌فی‌جانب‌النزول‌والدرج وسط‌بین‌السلسلتین و **نحن‌جعلناها هناك‌ایضاسلسلتین فمراتب السلسلتین کلها متوالیة علی نسبة واحدة**»

۲ ـ یعنی هر ۱۰ واحد از یک مرتبه را یک واحد از مرتبهٔ بعدی محسوب می‌داریم

۳ ـ یعنی مثلاً هر ۶۰ ثالثه را یک ثانیه و هر ۶۰ ثانیه را یک دقیقه و هر ۶۰دقیقه را یک درجه‌می گیریم (باید متوجه بود که‌در قدیم اعداد دردستگاه شصتگانی ازطرف‌راست به‌چپ نوشته می‌شده است)

یعنی :

له	ک	یو	یز	کط	مح	یب	(رابعه)
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
۳۵	۲۰	۱۶	۱۷	۲۹	۴۸	۱۲	

که می‌توان آن را مطابق باقرارداد شماره ۱۷۸ کتاب حاضر از چپ به‌راست چنین نوشت :

۱۲ , ۴۸ , ۲۹ , ۱۷ ; ۱۶ , ۲۰ , ۳۵

کاشانی می‌گوید که درشمار دهگانی تا زمان وی یک سلسله مراتب صعودی وجود داشته که همانگونه که امروزه معمول است از چپ به‌راست نوشته می‌شده مثل :

$$۷۵۶۳ = ۷ \times (۱۰)^{۳} + ۵ \times (۱۰)^{۲} + ۶ \times (۱۰) + ۳$$

و وی یک سلسلهٔ نزولی از کسرهای اعشاری درشمار دهگانی وضع کرده است و مرتبهٔ یکان را حدفاصل بین عددهای صحیح و کسرهای اعشاری قرار داده. یعنی مثلاً ۷۵۶۳ واحد و ۲۹۱ هزارم را به‌صورت زیر مجسم کرده است :

$$۷ \times ۱۰^{۳} + ۵ \times (۱۰)^{۲} + ۶ \times (۱۰) + ۳ + \frac{۲}{(۱۰)} + \frac{۹}{(۱۰)^{۲}} + \frac{۱}{(۱۰)^{۳}}$$

۲۸۱ ـ به‌طوری که درشمارهٔ ۱۶۱ بیان کردیم **کاشانی** درباب اول از مقالهٔ دوم مفتاح می‌نویسد[۱] : «منجمان کسرهای معطوفه‌ای به کار می‌برند[۲]

۱ ← **مفتاح** ، ص ۴۲ : «والمنجون استعملوا کسورا معطوفة ...» ← ذیل شمارهٔ ۱ صفحهٔ ۱۰۱ کتاب حاضر

۲ - مقصود از کسرهای معطوفه کسرهایی است که از عطف دویاچند کسر حاصل شود (← ذیل شمارهٔ ۲ صفحهٔ ۹۹)ـ مثلاً کاشانی «۳ دقیقه و ۴ ثانیه و ۵ ثالثه» را که می‌توان به‌صورت

$$\frac{۳}{۶۰} + \frac{۴}{(۶۰)^{۲}} + \frac{۵}{(۶۰)^{۳}}$$

نوشت کسرهای معطوفه می‌نامد.

که مخرجهای متوالی آنها شصت وقوای متوالی‌شصت است تاهرجا بخواهند وآنها را به‌ترتیب دقیقه‌ها وثانیه‌ها وثالثه ورابعه‌ها و غیره می‌نامند و **مابه‌قیاس حساب منجمان کسرهایی ایرادکردیم که مخرجهای متوالی آنها ده وقوای متوالی ده‌می‌باشد تاهرجا بخواهیم** و آنهارا به‌ترتیب «اعشار» و «دومین اعشار» و «سومین اعشار» و «چهارمین اعشار» نامیدیم [پایان] .

از این رو پیداست که کاشانی از روی کسرهای شصتگانی به‌اختراع کسرهای اعشاری ملهم شده و همانگونه که منجمان عدد ۶۰ و قوای ۶۰ را برای مخرجهای کسرهای شصتگانی اختیارکرده‌اند او عدد ۱۰ وقوای ۱۰ را مخرج گرفته و بدان سان که منجمان $\frac{۱}{۶۰}$ را **دقیقه** و $\frac{۱}{۶۰^۲}$ راثانیه و $\frac{۱}{۶۰^۳}$ را **ثالثه** وغیره نامیده‌اند او $\frac{۱}{۱۰}$ را **اعشار** (= دهم) و $\frac{۱}{۱۰^۲}$ را **دومین اعشار** (= صدم) و $\frac{۱}{۱۰^۳}$ را **سومین اعشار** (= هزارم) وغیره گفته است .

۲۸۲ ـ موضعی‌از «مفتاح‌الحساب» که **کاشانی** درآن باصراحت وروشنی کامل از اختراع کسرهای اعشاری گفتگو کرده وبه‌تعریف آنها پرداخته است آغاز باب ششم از مقالهٔ سوم آن کتاب است که درآنجا می‌نویسد[۱] :

۱ ← **مفتاح** ، ص ۷۹ : «الباب‌السادس فی‌تحویل الارقام‌الستینیة الی‌الهندیه و بالعکس صحاحاً وکسوراً و تحویل کسورها الی مخرج آخر و معرفة الکسورالتی وضعنا ها علی‌قیاس الکسورالستینیة و لنقدم هذالما استخر جنا نسبة المحیط الی القطر فی رسالتنا المسماة بالمحیطیةوبلغنا الکسورالی‌التاسعه، اردنا ان نحولها الی الرقوم‌الهندیة لئلا یعجزالمحاسب الذی لم‌یعرف‌حساب‌المنجمین، اخذنا کسرالمحیط من‌مخرج هوعشرةالاف مکررة خمس‌مرات وهذا عددمجرد فکانا قسمنا الواحدالصحیح عشرة اقسام و قسمنا کل عشر عشرة اقسام ثم کل قسم منها عشرة اقسام هکذا بالغاً مابلغ فسمینا الاقسام الاولی اعشاراً لکونها کذلک والثانیة ثانی‌الاعشار والثالثة ثالث الاعشار وهکذا بالغاً مابلغ لیکون‌مراتب‌الکسوروالصحاح

←

«باب ششم در تحویل ارقام شصتگانی به‌ارقام هندی و برعکس ، وتحویل کسرهای آنها به‌مخرج دیگر و شناسایی **کسرهایی که مابه‌قیاس کسرهای شصتگانی وضع کردیم**»

«وقبلاً متذکر می‌شویم که پس‌از آنکه نسبت محیط (دایره) را به‌قطر (آن) در رسالهٔ خودمان که‌موسوم به‌محیطیه‌است استخراج کردیم‌و کسرهای(شصتگانی) آن را تا تاسعه $\left(= \frac{۱}{۶۰^۹}\right)$ رساندیم **خواستیم که آن** (کسرها) **را به‌ارقام هندی تحویل کنیم** (= در دستگاه شمارد هگانی بنویسیم) **تا محاسبی که حساب منجمان** (= حساب در دستگاه شصتگانی) **را نمی‌داند در حساب درنماند** . ما کسر محیط (= قسمت کسری عدد ۲π) را با مخرجی گرفتیم که ده برابر هزار است که پنج‌بار تکرار شود[۱] و این‌عددی‌است مجرد[۲]. پس واحد صحیح رابه‌ده قسمت(متساوی) تقسیم کردیم و هرعشر $\left(= \frac{۱}{۱۰}\right)$ را نیز به‌ده قسمت (متساوی) تقسیم کردیم وباز هرقسمت را به‌ده قسمت متساوی تقسیم کردیم و عمل را به‌همین ترتیب ادامه دادیم وقسمتهای اول‌را **اعشار** نامیدیم، چه‌این گونه‌بودند، وقسمتهای‌دوم را **اعشار**

←

علی‌نسبة واحده علی‌قیاس حساب‌المنجمین وسمیناها بالکسورالاعشاری . وینبغی ان یکتب الاعشار فی‌یمین‌الاحاد و ثانی‌الاعشار فی‌یمین‌الاعشار و ثالث‌الاعشار فی‌یمین ثانیها هکذاالی حیث بلغ ، فیکون‌الصحاح والکسور فی‌سطر واحد والعمل به‌فی‌الضرب و القسمة و استخراج الضلع الاول‌من المضلعات‌وغیرهاعلی‌قیاس حساب‌المنجمین کمااوردنا بعضهافیماسبق ؛وکذایکون معرفةجنسیة المراتب علی‌قیاس‌معرفة جنسیة مراتب‌حسابهم، اعنی یکون عدد مرتبة الاحاد صفراً وللعشرات والاعشار واحداً وللمأت وثانی‌الاعشاراثنین‌و للالوف و ثالث الاعشار ثلثة و لعشرات الالوف ورابع الاعشار اربعة وهلم جرا »

۱ ـ یعنی $۱۰^{۱۶} = (۱۰۰۰)^۵ \times ۱۰$

۲ ـ عدد مجرد یعنی $(۱۰)^n$ ← شمارهٔ ۹۹ کتاب حاضر

دوم وقسمت‌های سوم را **اعشارسوم** نامیدیم وقس‌علی‌هذا **تا مراتب کسرها و مراتب صحیح** به‌قیاس **حساب منجمان به یک نسبت باشند**[۱] و آنها را **کسرهای اعشاری** نامیدیم».

«وباید اعشار درسمت آحاد واعشار دوم درسمت راست اعشار واعشارسوم درسمت راست اعشار دوم نوشته شوند و همین‌طور تا آخر وقسمت‌صحیح‌وکسری روی یک سطر نوشته شوند».

«وعمل باآنها (= عمل با کسرهای‌اعشاری) درضرب‌وتقسیم واستخراج ریشهٔ nُم وجز آنها مطابق‌باحساب منجمان است همانگونه که قبلاً بعضی از آنها راذکر کردیم وهمچنین شناسایی جنس مراتب آنها به‌قیاس شناسایی جنس مراتب‌حساب منجمان است یعنی **عدد مرتبهٔ آحاد صفر است** و عدد مرتبهٔ دهگان و اعشار (= دهمها) یک وعددمرتبهٔ صدگان واعشار دوم (= صدمها) **۲** وبرای مرتبهٔ هزارگان ومرتبهٔ اعشار سوم (هزارمها) **۳** وبرای‌مرتبهٔ ده‌هزارگان واعشار چهارم (ده‌هزارمها) **۴** است وغیره[۲]»

---

۱ - یعنی همانگونه که مثلاً واحد مرتبهٔ یکان یک دهم واحد مرتبهٔ دهگان است واحد مرتبهٔ دهم (اعشار) نیز یک‌دهم واحد مرتبهٔ یکان باشد وقس‌علی‌هذا

۲ - عدد هرمرتبه یعنی قوهٔ ده درآن مرتبه. مثلاً عدد مرتبهٔ هزارگان (10^3)عدد۳ است. اماچون **کاشانی** اعداد منفی رابه‌کار نمی‌بردمثلاً عدد مرتبهٔ هزارم $\left(\frac{1}{10^3}\right)$ را نیز **۳** گرفته است با این تفاوت که مرتبهٔ هزارگان را ازسلسلهٔ صعودی و مرتبهٔ هزارم (اعشار سوم) را ازسلسلهٔ نزولی محسوب داشته ـ ضمناً این مطلب شایان توجه است که کاشانی‌قوهٔ ۱۰ را در مرتبهٔ یکان **صفر** گرفته (عدد مرتبهٔ آحاد صفر است) و برای صفر نیز مفهوم‌عدد قائل شده است وتا آنجا که اطلاع داریم قبل از **کاشانی** کسی برای صفر این مفهوم را درنظر نگرفته است (ورجوع کنید به‌شماره‌های ۱۰۶ و ۲۲۰ کتاب حاضر)

« و درضرب دوعدد مفرد[1] اگر مرتبه های مضروب و مضروب فیه در یک طرف مرتبهٔ یکان باشند عدد مرتبهٔ حاصل‌ضرب مساوی با مجموع اعداد مرتبه های آنها در طرف‌مجموع است و اگر در دوطرف مرتبهٔ یکان باشند عدد مرتبهٔ حاصل‌ضرب مساوی باتفاضل اعداد مرتبه های آنها در طرف فاضل می‌باشد[2]. ودر تقسیم دوعدد مفرد هرگاه عدد مرتبهٔ مقسوم از عدد مرتبهٔ مقسوم‌علیه بزرگتر باشد مرتبهٔ خارج قسمت متعلق به‌طرفی (از سلسله های صعودی و نزولی قوای ده) است که عدد آن بیشتر است والامتعلق به‌طرف‌دیگر است. و درصورتی که مقسوم و مقسوم‌علیه هردو دریک‌طرف مرتبهٔ یکان باشند مرتبهٔ‌خارج قسمت مساوی باتفاضل اعداد مرتبه های مقسوم و مقسوم‌علیه است و اگر در دوطرف مرتبهٔ یکان واقع باشند عدد مرتبهٔ‌خارج

---

۱ ـ دردستگاه دهگانی ، به‌قول **کاشانی** ، عدد مفرد یعنی عددی که به‌صورت :

$$a \times \frac{۱}{۱۰^n} \quad \text{ویا} \quad a \times (۱۰)^n$$

نوشته شود که درآنها a عدد صحیح یک رقمی است

۲ ـ مقصود این است که درضرب دوعدد مفرد $a \times ۱۰^n$ و $b \times ۱۰^m$ قاعده‌های زیر که بامثال عددی بیان می‌شوند حکمفرما است (علت اینکه باید چند حالت درنظرگرفت این‌است که قوای منفی به‌کار نرفته است) :

$$a(۱۰^۵) \times b(۱۰^۳) = ab(۱۰^۸)$$

$$a\left(\frac{۱}{۱۰^۵}\right) \times b\left(\frac{۱}{۱۰^۳}\right) = ab\left(\frac{۱}{۱۰^۸}\right)$$

$$a(۱۰^۵) \times b\left(\frac{۱}{۱۰^۳}\right) = ab(۱۰^۲)$$

$$a(۱۰^۳) \times b\left(\frac{۱}{۱۰^۵}\right) = ab\left(\frac{۱}{۱۰^۲}\right)$$

قسمت مساوی با مجموع مرتبه‌های مقسوم‌وعلیه است[۱]» [پایان].

۲۸۳ ـ خلاصه **کاشانی**، چنانکه خود می‌گوید، برای‌آنکه کسانی که با حساب منجمان یعنی‌محاسبه با کسرهای‌شصتگانی (دقیقه و ثانیه‌وثالثه‌وغیره) آشنایی‌ندارند بتوانند محاسبات کسری‌رانیز در دستگاه‌دهگانی انجام‌دهندباالهام گرفتن‌از کسرهای شصتگانی که‌در آنها واحد هر مرتبه . ٦ برابر واحد مرتبهٔ بعدی است (یعنی مثلاً هر دقیقه . ٦ ثانیه‌وهرثانیه . ٦ ثالثه‌است) کسرهایی‌اختراع کرده که‌درآنهاواحدهرمرتبه . ۱ برابر واحدمرتبهٔ بعدی‌است(یعنی‌مثلاً یک‌دهم ده‌برابریک‌صدم‌ویک‌صدم‌ده‌برابر یک‌هزارم‌است)وآنهارا **کسرهای‌اعشاری** نامیده‌است. بااین‌تفاوت که‌منجمان کسرهای شصتگانی را از راست به‌چپ می‌نویسند ولی **کاشانی** می‌گوید که کسرهای اعشاری را باید مطابق با اعداد دستگاه دهگانی از چپ به‌راست و در دنبال عدد صحیح نوشت. و مراتب نزولی این کسرها را **کاشانی اعشار** و **اعشار دوم** و **اعشارسوم** وغیره نامیده است.

۲۸٤ ـ مشاهده می‌شود که درحالی که **کاشانی** محاسبه با اعداد صحیح و کسرها را در دستگاه‌شصتگانی وهمچنین محاسبه بااعدادصحیح را دردستگاه‌دهگانی

---

۱ ـ یعنی در تقسیم‌دوعدد مفرد $a \times ۱۰^{n}$ و $b \times ۱۰^{m}$ قاعده‌های زیرکه‌با مثالهای عددی بیان می‌شوند حکمفرما است:

$$a(۱۰^{۵}) : b(۱۰^{۲}) = \frac{a}{b}(۱۰^{۳})$$

$$a(۱۰^{۵}) : b\left(\frac{۱}{۱۰^{۲}}\right) = \frac{a}{b}(۱۰^{۷})$$

$$a(۱۰^{۳}) : b(۱۰^{۵}) = \frac{a}{b}\left(\frac{۱}{۱۰^{۲}}\right)$$

$$a\left(\frac{۱}{۱۰^{۳}}\right) : b\left(\frac{۱}{۱۰^{۵}}\right) = \frac{a}{b}(۱۰^{۲})$$

و غیره

از پیشینیان خود می‌داند اختراع کسرهای اعشاری رابا صراحت کامل از اختراعات خود می‌شمارد ومی گوید که این کسرها را به‌قیاس کسرهای شصتگانی اختراع کرده است. ومی بینیم که حتی نام **کسر اعشاری** را **کاشانی** برای این کسرها وضع کرده است.

کاشانی کاملاً به‌اهمیت اختراع خود واقف بوده و هوشیارانه کسرهای اعشاری راهم در رسالهٔ محیطیه و هم در مفتاح الحساب در ضمن محاسبات به کار برده و چون این اختراع تازه ونو بوده، هرجا فرصتی به‌دست آورده توضیحی دربارهٔ آن داده است تا رفته‌رفته دیگران باآن آشنا شوند.

از جمله پس از آنکه در «رسالهٔ محیطیه» نسبت محیط دایره به‌قطر آن یعنی عدد π را برحسب کسرهای شصتگانی تا تاسعه $\left(=\frac{۱}{۶۰^۹}\right)$، چنانکه دربخش چهارم کتاب حاضر دیدیم، حساب کرده‌است، در فصل هشتم آن رساله آن عدد را به‌دستگاه اعشاری تبدیل کرده و ۲π را مساوی با:

$$۲\pi = ۶٫۲۸۳\ ۱۸۵\ ۳۰۷\ ۱۷۱\ ۷۹۵\ ۸۶۵$$

به‌دست آورده وبرای آنکه خوانندهٔ رساله بااین اختراع جدید آشنا شود بلافاصله نوشته است[۱]: «وبدان که آن ۲ که درآخرین مرتبهٔ کسرها است[۲] به‌منزلهٔ دقیقه‌ها برای عدد صحیح ۶ است بنابرآنکه ده دقیقه یک واحد صحیح باشد واگر بخواهیم،

۱ ـ واعلم ان الاثنین اللذین فی آخر مراتب الکسورهما بمنزلة الدقایق للستة الصحاح علی ان عشر دقایق یکون واحداً صحیحاً وان شئنا نسمی هذه المرتبه بالاعشار والثمانیة التی عن یمینها بمنزلة الثوانی و نسمیها بثانی الاعشار والثلثة بعدها بمنزلة الثوالث و نسمیها بثالث الاعشار وعلی هذا بقیاس حساب النجوم و لهذا اخذنا من مخرج مفرد وهوواحد . وهذاالطریق فی الحساب الهندی مما استنبطناه »

۲ ـ مقصود رقم ۲ درعدد ۶٫۲۸۳۱ ... است که بلافاصله درسمت راست ممیز قرار دارد.

این مرتبه را اعشار می‌نامیم ، وآن ۸ که درسمت راست آن است به‌منزلهٔ ثانیه‌ها است و آن‌را اعشار دوم می‌نامیم و آن ۳ که بعد ازآن است به‌منزلهٔ ثالثه‌ها است وآن را اعشار سوم می‌نامیم و به همین ترتیب ، به‌قیاس حساب نجوم . وبرای این ما آن کسر را از مخرج مفرد گرفتیم وآن واحد است و این روش را درحساب هندی ما اختراع کرده‌ایم» [پایان] .

از دقت درمطالب فوق‌آشکار می‌شود که‌اینکه **کاشانی** می‌گوید که کسرهای اعشاری را به‌قیاس حساب منجمان اختراع کرده باحقیقت وفق می‌دهد .

۲۸۵ ـ کاشانی برای نوشتن کسرهای اعشاری به‌چند طریق زیر عمل کرده واگرچه او **ممیز** را اختراع نکرده ولی کسرهای‌اعشاری را تقریباً به‌شکلی که‌امروزه معمول‌است می‌نوشته .

وی قسمت‌های صحیح واعشاری را با رنگهای‌مختلف، مثلاً سیاه وسرخ، روی یک سطر می‌نوشته ویا قسمت صحیح را باخط ریز وقسمت اعشاری را با خط درشت می‌نوشته (بالخفاء والجلاء) ویا اینکه اسامی **صحیح** و **کسر** را بالای قسمتهای صحیح و کسری ثبت می‌کرده و آنها را با خط قائم از یکدیگر جدا می‌نموده است . مثلاً ۲۵ر۴۲۰ را اینگونه نوشته :

صحیح	کسر
٤۲۰	۲۵

گاهی نیز پس از نوشتن عدد ، نام آخرین مرتبهٔ اعشاری را ثبت می‌کرده وبااین روش کاملاً می‌توان قسمت صحیح عدد را از قسمت اعشاری آن تشخیص داد . مثلاً **کاشانی** عدد ۸۳ر۳٤۸۹ را به‌صورت زیر نوشته است :

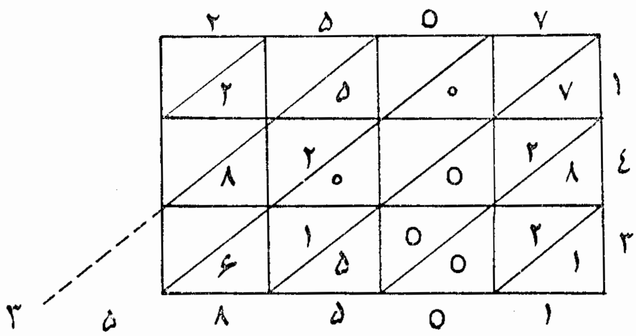
۸۳۳٤۸۹ رابع‌الاعشار

یعنی رقم ۹ سمت راست از جنس اعشار چهارم (ده‌هزارم) است ویا به‌عبارت دیگر عدد فوق چهار رقم اعشاری دارد و بنابراین ارقام اعشاری آن عبارتند از ۳۴۸۹ وقسمت صحیح آن ۸۳ است.

چند مثال از کاربرد کسرهای اعشاری توسط کاشانی

گفتیم که **کاشانی** کسرهای‌اعشاری راهوشیارانه درآثارخودبه‌کار برده‌است. وی برای آنکه مزیت این گونه کسرها را در محاسبات عملاً به‌ثبوت رساند در مواضع مختلف از «مفتاح‌الحساب» و «رسالهٔ محیطیه» روش محاسبه با آنها را ذکر کرده ومثالهای مختلف آورده است. از جمله:

۲۸۶ - مثال ۱ - (مفتاح، ص ۵۴) - عمل ضرب ۲۵٫۰۷ × ۱۴٫۳ را به‌وسیلهٔ شبکهٔ ضرب انجام‌داده و درشبکهٔ مزبورارقام اعشاری را درشت وارقام قسمت‌صحیح را ریز نوشته و حاصل‌ضرب یعنی ۳۵۸٫۵۰۱ را به‌دوصورت زیر نشان داده است:



حاصلضرب:

۳۵۸۵۰۱

یا

۳۵۸
۵۰۱
۱۰۰۰

۲۸۷ - مثال ۲ - (مفتاح، ص ۸۲ و ۸۳) - **کاشانی** عدد (ح **کط مد** ثالثه) را که در دستگاه شصتگانی نوشته شده به‌دستگاه اعشاری تحویل کرده و جواب را

۱۴۱۵۹۳ سادس‌الاعشار

یعنی ۱۴۱۵۹۳ر۰ یافته است .

همچنین عدد اعشاری ۳۷۶ر۰ را به‌دستگاه شصتگانی برده وجواب را

کب لج لو ثالثه

یعنی :

$$\frac{۲۲}{۶۰} + \frac{۳۳}{(۶۰)^۲} + \frac{۳۶}{(۶۰)^۳}$$

به‌دست آورده است .

۲۸۸ ـ مثال ۳ ـ (**مفتاح** ، ص ۸۴) ـ برای تبدیل اعداد از دستگاه‌شصتگانی به‌دستگاه اعشاری وبرعکس **کاشانی** جدولی تشکیل داده است تا کار سهل باشد .

۲۸۹ ـ مثال ٤ ـ (مفتاح ، ص۱۰۳) ـ برای محاسبهٔ مساحت n ضلعی‌منتظم **کاشانی**مقدار $\frac{n}{4}\cot g\frac{180^\circ}{n}$ را برای چند ضلعی‌های منتظم مهم حساب کرده تا برای محاسبهٔ مساحت S چند ضلعی ، مربع ضلع آن را در عدد مذکور ضرب کنند (رجوع کنید به‌شمارهٔ ۲۰۳ کتاب حاضر) .

مثلاً مساحت شش ضلعی منتظمی را که طول هرضلع آن ۲۰ر۵ ذراع باشد حساب کرده و جواب را به‌صورت :

کسور	صحاح
۸٤۱٤۳۹	۱۰۹۱

یعنی ۸٤۱٤۳۹ر۱۰۹۱ یافته‌است[1] .

---

۱ ـ درمفتاح‌الحساب چاپی (ص۱۰٤) ارقام کسری این عدد اشتباهاً ۸٤۱۰۷۹ نوشته شده است .

۲۹۰ ـ مثال ۵ ـ (**مفتاح**، ص ۱۰۱) ـ حاصل ضربهای عدد:

$$\pi = ۳٫۱٤۱۵۹۳۱$$

یعنی مقدار تقریبی نسبت دایره به‌قطر آن را دراعداد صحیح از ۱ تا ۱۰ در جدولی قرار داده است تا در موقع محاسبه از آن استفاده کنند.

۲۹۱ ـ مثال ٦ ـ (مفتاح، ص ۱۰۱) ـ حاصل ضربهای عدد :

$$\frac{\pi}{٤} = ۰٫۷۸۵\ ۳۹۸\ ۲۰۱$$

یعنی نسبت مساحت دایره به مربع قطر آن را در جدولی قرار داده است.

۲۹۲ ـ مثال ۷ ـ (**مفتاح**، ص ۱۱۲) ـ مساحت دایره‌ای راکه‌شعاع آن ۷۷ ذراع باشد به‌دوطریق حساب کرده و جواب را مساوی با :

$$۱۸\ ٦۲٦٫۵۰٤\ ۸۹۷$$

به‌دست آورده است.

۲۹۳ ـ مثال ۸ ـ (مفتاح، ص ۲۳۹) ـ **کاشانی** در مثال هفتم از فصل دوم از باب چهارم «مفتاح‌الحساب» که مربوط به‌وصایا است مسألهٔ زیر را مطرح کرده :

«مردی سه پسر داشت و وصیت کرد که پس‌از مرگش به‌اندازهٔ سهم ارث هریک از فرزندانش به‌شخصی معین و به‌اندازهٔ جذر تفاضل ثلث ماترك وسهم هریك از فرزندان رابه‌شخص دیگری بدهند. باید سهم هریك را تعیین کرد».

برای‌حل این‌مسأله **کاشانی** ماترك رامساوی‌با ۱۰۰۰ دینار و سهم شخص‌دوم را x گرفته‌ومعادلهٔ مسأله را به‌صورت زیر تشکیل داده است :

$$٤(۳۳۳\frac{۱}{۳} - x^{۲}) + x = ۱۰۰۰$$

وریشهٔ مثبت این معادله را مساوی با ۹٫۲۰۵۰ به‌دست آورده و این سهم شخص دوم است و سهم شخص اول وهریك از فرزندان را مساوی با ۲٤۷٫٦۸٦٤ حساب کرده است.

۲۹٤ ـ مثال ۹ ـ (مفتاح ، صفحات ۲٤٤ تا ۲٤۷) ـ درمثالهای پنجم وششم وهفتم از فصل سوم از باب چهارم از مقالهٔ پنجم «مفتاح الحساب» ، **کاشانی** سه‌مسألهٔ محاسبهٔ هندسی را حل کرده و در آنها کسرهای اعشاری را بکار برده و جوابهـا را برحسب کسر اعشاری حساب کرده است و ما به‌عنوان نمونه‌صورت مسألهٔ مثال هفتم مذکور را در اینجا به‌اختصار می‌نویسیم (**مفتاح** ، ص ۲٤۷) :

«می‌خواهیم در داخل مثلثی که طول اضلاع آن معلوم است نقطه‌ای بیابیم که اگر آن را به رأسهای مثلث وصل کنیم سه‌مثلث به‌دست آید که مساحت اولی نصف مساحت دومی و مساحت دومی ثلث مساحت سومی باشد» .

۲۹۵ ـ مثال ۱۰ ـ در فصل هشتم «رسالهٔ محیطیه» کاشانی مقدار ۲π راچنانکه قبلاً گفتیم با ۱٦ رقم اعشاری دقیق به‌دست آورده و مضارب ۲π را در اعداد از ۱ تا ۱۰ حساب ودر جدولی ثبت کرده است . ودرفصل نهم همان رساله روش به‌کار بردن جدول مذکور را شرح داده و به‌عنوان مثال طول محیط دایره‌ای را که قطرش ٦٥٠٨٤٤ر١٢٥ ذراع باشد به دونوع حساب کرده وآن را مساوی با :

٤ ٠٨٩ ٣٧٤,٢٤٣ ٤٦٤ ١٥٤ ١٩

به‌دست آورده است . وهمچنین قطر دایره‌ای را که طول محیطش مساوی با : ٦٥٠٨٤٤ر١٢٥ ذراع باشدحساب کرده وآن را مساوی با ٦٠ر٥٨٥ ١٠٣ به‌دست آورده است .

فهرست منابع و مآخذ[1]

(به ترتیب الفبایی علائم اختصاری آنها)

آبو

AABOE,Asger : **«Al—Kashi's Iteration Method for the determination of sin 1° »** , Scripta Mathematica, vol. 20,1954,pp. 24–29

اریستیدمار

ARISTIDE MARRE : **«Le Talkhys d'Ibn Albanna»** , Atti de'Nuovi Lincei, vol. 17, 1864,pp. 289-319

استوری P = ستوری P

STOREY,C.A. **«Persian Literature»** , vol. II, part I, London, 1958

اسمیث H = سمیث P

SMITH, D.E. **«History of Mathematics»** , 2 vol. , vol I, 1951 ; vol. II, 1953 , U.S.A.

التفهیم

«التفهیم لاوائل صناعة التنجیم»، تألیف **ابوریحان بیرونی**، با تصحیح ومقدمه وشرح وحواشی توسط آقای جلال همائی، چاپ تهران ۱۳۱۶ - ۱۳۱۸

---

۱ ـ نام کتابهای دیگری که مورد استفاده واقع شده و دراین فهرست نیامده درمتن کتاب حاضر یا در ذیل صفحات آن آمده است.

الدو میلی S

MIELI, Aldo : «**La science arabe** et son rôle dans l'évolution scientifique mondiale» , Leiden, 1966.

الفهرست

«**کتاب الفهرست**» ، تألیف ابوالفرج محمدبن اسحاق معروف به**ابن‌الندیم** ، چاپ فلوگل (Flügel) ، جلد اول لایپتزیک ۱۸۷۱ م .

این کتاب را آقای **م. تجدد** به‌فارسی ترجمه کرده است : تهران ، کتابفروشی ابن‌سینا، ۱۳٤۳ هـ.ش .(در کتاب‌حاضراز این ترجمه به‌عنوان «ترجمهٔ‌فارسی الفهرست» نام برده‌ایم) .

ایسیس

ISIS. Official Quarterly Journal of the History of Science Society.

مجلهٔ ایسیس را دانشمند فقید جرج سارتن درسال ۱۹۱۳ میلادی تأسیس کرد که هنوزهم منتشر می‌شود .

بروکلمان

BROCKELMANN, Carl : «**Geschichte der Arabischen Litteratur**»

درکتاب حاضر از**چاپ دوم** (۱۹٤۳ - ۱۹٤۹) جلدهای اول و دوم کتاب کتاب فوق با عنوانهای «بروکلمان G_1» و «بروکلمان G_2» و از متممهای آن با عنوانهای «بروکلمان S_1» و «بروکلمان S_2» نام برده‌ایم (شماره‌های صفحات G_1 و G_2 که درکتاب حاضر به‌آنها اشاره شده مربوط به‌**چاپ دوم** است) .

بیرجندی : شرح زیج

شرح زیج الغ بیک : تألیف **عبدالعلی بن محمدبن حسین نظام الدین بیرجندی** ، نسخهٔ خطی شمارهٔ ۴۷۳ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران .

تاریخ الحکماء

تاریخ الحکماء ، مختصر الزوزنی من کتاب اخبارالعلماء باخبارالحکماء : تألیف **جمال الدین علی بن یوسف القفطی** ، چاپ (Lippert) ، لایپتزیک ، ۱۹۰۳ .

ترجمهٔ فارسی تاریخ الحکماء از قرن یازدهم هجری - مقابله و تصحیح و حواشی و مقدمه به کوشش خانم بهین دارائی ، تهران ۱۳۴۷ .

تحریر اقلیدس

تحریر اصول اقلیدس - توسط **خواجه نصیرالدین طوسی** ، چاپ سنگی تهران ، ۱۲۹۸ ه.ق.

حبیب السیر

تاریخ حبیب السیر فی اخبارافراد بشر : تألیف **غیاث الدین خواندمیر** ، چاپ تهران (کتابفروشی خیام) .

داخل : رساله

DAKHEL , Abdul - Kader : **«Al-Kashi on ROOT EXTRACTION»** , American University of Beirut, 1960 .

دایرةالمعارف اسلام

ENCYCLOPEDIE DE L'ISLAM

چاپ اول ، چهار مجلد (ویک جلد ضمیمه) ، ۱۹۱۳ - ۱۹۳۴ لیدن - چاپ جدید. تاکنون سه‌جلد از آن از ۱۹۶۰ به‌بعد چاپ شده است (این کتاب به‌زبانهای انگلیسی و آلمانی نیز چاپ شده است (به‌عنوان مقالات آن‌طوری ارجاع کرده‌ام که بتوان آنها رادر هرچاپی که در دسترس باشد پیدا کرد).

دایرةالمعارف فارسی

به‌سرپرستی آقای **دکتر غلامحسین مصاحب** ، جلداول (ا - س) ، تهران ۱۳۴۵

رجائی : رساله

RAJA'I , Na'ila : **«The Invention of Decimal Fractions in the East and in the West»**

رسالهٔ دکترا است که درسال ۱۹۵۱ در دانشگاه‌آمریکائی بیروت نوشته‌شده و متأسفانه هنوز به‌چاپ‌نرسیده است و من آن‌را ندیده‌ام ولی چون درمتن کتاب ازآن اسم برده‌ام دراین فهرست ثبت شد.

رزنفلد ویوشکویچ

جمشید غیاث‌الدین الکاشی ، **مفتاح‌الحساب** و **الرسالةالمحیطیة** - الترجمه لبوریس رزنفیلد - التحریرلفلاد یمیرسیغال وادولف یوشکیفیتش - الشرح لادولف یوشکیفیتش وبوریس رزنفیلد - موسکو ۱۹۵۶ .

مشتمل برمتن عربی «مفتاح‌الحساب» و «رسالهٔ‌محیطیه» و ترجمه و شرح آنها به‌زبان روسی و همچنین ترجمه وشرح «رسالهٔ دستورالعمل‌وتصحیح الجدول» تألیف **میرم چلبی** به‌زبان روسی.

ستوری P ← استوری P

سمیث H ← اسمیث H

ساوتن F

SARTON, George : «The first explanation of decimal fractions» , ISIS , vol. 23, pp. 168 - 169 .

ساوتن I

SARTON, George : **«Introduction to the History of Science»** , vol. I , 1950; vol. II & III (each in 2 parts) , 1953, Baltimore.

سدیو A

SEDILLOT, L.A. **«De l'algèbre chez let Arabes»** Jourmal asiatique , 5me Série , tame II, 1853, pp. 323 - 356.

سدیو P

SEDILLOT, L.A. **«Prolégomènes des tables astronomiques d'Oloug-Beg»** , Paris , 1853 .

سوتر G

SUTER , Heinrich : **«Über die Geometrie der Sohne des Mûsâ b. Schâkir»**, Bibliotheca Mathematica , 3F, III , 1902 , pp. 259-272 .

سوتر M

SUTER, Heinrich : **«Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke»**,Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften ... , X. Heft , Leipzig , 1900 .

سوتر U

SUTER, Heinrich : **«Über das Rechenbuch des Alî ben Ahmed el-Nasawî»** , Bibliotheca Mathematica 3 Folge , 7. Band, 1906-1907, pp. 113-119.

شمارنامه

شمارنامه : تألیف **محمدبن‌ایوب طبری**،انتشارات بنیادفرهنگ ایران، ۱۳۴۰

شوی B

SCHOY , Carl : **«Beitrage zur arabischen Trigonometrie»,** ISIS, vol. V, 1922/23, pp. 364-399.

شوی T

SCHOY , Carl : **«Die trigonometrischen Lehren des persischen astronomen Abu'l-Raihan Muh. ibn Ahmad al-Bîrûnî»**,Hanover 1927 .

صایلی O

SAYILI, Aydin : **«The Observatory in Islam»** , Ankara , 1960 .

علم‌الفلک

علم‌الفلک ، تاریخه عندالعرب فی‌القرون الوسطی . تألیف کارل نالینو (Carl Nallino) ، رم ، ۱۹۱۱ .

فهرست دانشگاه

فهرست نسخه‌های خطی کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه‌تهران ، تألیف آقای **محمد تقی دانش‌پژوه** در پانزده جلد.

فهرست سوم ادبیات

فهرست نسخه‌های خطی کتابخانهٔ دانشکدهٔ ادبیات (تهران) ـ مجموعهٔ امام

جمعهٔ کرمان ، نگارش آقای **محمدتقی دانش‌پژوه**. به‌جای شمارهٔ اول سال سیزدهم مجلهٔ دانشکدهٔ ادبیات تهران ـ مهرماه ۱۳۴۴ .

فهرست رضوی

فهرست کتابخانهٔ استان قدس رضوی ، تألیف آقای **عبدالعلی اکتایی**. جلدسوم فصل هفدهم .

فهرست مجلس

فهرست کتابخانهٔ مجلس شورای ملی در ۱۰ جلد .

فهرست میکروفیلمهای دانشگاه

فهرست میکرو فیلمهای کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران ، تألیف آقای محمد تقی دانش پژوه ، تهران ۱۳۴۸ ه.ش.

قاضی‌زاده

قاضی زادهٔ رومی (موسی بن محمدبن محمود) : **تحریر رسالة فی استخراج جیب الدرجة الواحده** (تحریر رسالهٔ وتروجیب کاشانی است در ۱۲ صفحه و درسال ۱۲۹۹ ه.ق. درتهران به‌چاپ سنگی رسیده ونسخه های‌چاپی آن درپایان بعضی از نسخه های‌چاپی کتاب مفتاح الحساب دیده می‌شود) .

قانون مسعودی

القانون المسعودی ، تألیف **ابوریحان بیرونی** ، چاپ حیدرآباد ۱۹۵۴-۱۹۵۶ درسه جلد .

قربانی : ابن‌قنفود

قربانی ، ابوالقاسم : « **ابن‌قنفوذ ورمزها وعلامتهای جبری که وی‌به‌کاربسته است**» ، نشریه علمی وفنی سخن ، شمارهٔ ۲ ، سال ششم، خردادماه ۱۳٤٦ صفحات ۵۷ تا ۵۹ .

قربانی : تاریخ پی

قربانی ، ابوالقاسم : «**تاریخ‌عدد پی‌درشرق وغرب**»، مجلهٔ‌سخن ، دورهٔ‌ششم، شمارهٔ ۵ ، تیرماه ۱۳۳۳ .

قربانی : دوریاضیدان ایرانی

قربانی ، ابوالقاسم: «**دو ریاضیدان ایرانی وشمه‌ای دربارهٔ عددهای‌متحاب**» از نشرات مرکز تحقیقات علمی وتاریخی مدرسهٔ عالی دختران ایران ، دیماه۱۳٤۷

قربانی : علامتهای جبری

قربانی ، ابوالقاسم : «**رمزها وعلامتهایی‌که مسلمانان درجبر به‌کار برده‌اند**» نشریهٔ علمی و فنی سخن ، شمارهٔ ۱ سال ششم ، ۱۳٤٦ ، صفحات ٤ تا ۷

قربانی : قطب‌الدین

قربانی، ابوالقاسم : «**قطب‌الدین شیرازی، ریاضیدان بزرگ ایرانی**» ، مجلهٔ راهنمای کتاب ، سال یازدهم شمارهٔ هشتم ، صفحات ٤۲۹ تا ٤۳۵ .

قربانی : مسأله شطرنج

قربانی ، ابوالقاسم : «**مسألهٔ شطرنج**» مجلهٔ سخن دورهٔ ششم ، شمارهٔ ٦ ، ۱۳۳٤ ، صفحات ۵۰۳ تا ۵۰٦ .

قربانی : مثلث حسابی

قربانی ، ابوالقاسم : «**مثلث حسابی خیام (یا پاسکال؟) ، دستور دوجمله‌ای خیام (یانیوتن)**» ، مجلهٔ سخن ، دورهٔ دهم ، شمارهٔ ۱۰ ، ۱۳۳۸ ، صفحات ۱۰۹۷ تا ۱۱۰۵ .

قربانی : نخستین مخترع

قربانی ، ابوالقاسم: «**نخستین مخترع کسرهای اعشاری**» ، مجلهٔ سخن ، دورهٔ پنجم ، شمارهٔ ۱۰ ، ۱۳۳۳ ، صفحات ۷٤۷ تا ۷۵۳ .

کارادوو A

CARRA DE VAUX : **«Sur l'histoire de l' arithmétique arabe»**, Bibliotheca Mathematica , No 2, 1899, pp. 33-36 .

کارادوو U

CARRA DE VAUX : **«Une proposition du Livre des Fils de Mousa sur les calculs approchés»** Bibliotheca Mathematica , Nouvelle série, 12, pp. 1-2 .

کراوزه S

KRAUSE,Max : **«Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker»** Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Aastr. u. Physik , Abteilung B. Studien. Band 3 , 1936.

کشف‌الظنون

کشف‌الظنون عن اسامی الکتب والفنون، تألیف **حاجی خلیفه** (مصطفی بن عبدالله کاتب چلبی مورخ و نویسنده ترک) - متن عربی این کتاب باترجمهٔ لاتینی آن در سالهای ۱۸۳۵ تا ۱۸۵۸ درهفت جلد توسط **فلوگل** چاپ شده است - در استانبول نیز در دوجلد ویک ذیل به‌چاپ رسیده است (از هردوچاپ استفاده کرده‌ام).

کندی A

KENNEDY, E.S.: **«Al-Kashi's treatise on astronomical Observational instruments»**, Journal of Near Eastern studies, vol. 20, 1961, pp. 98-108.

کندی C

KENNEDY, E.S.: **«Al-Kâshi's Plate of Conjonction»**, ISIS, vol. 38, 1947, pp. 56-59.

همین مقاله به‌فارسی و باعنوان «**لوح اتصالات کاشی**» درمجلهٔ ایران وآمریکا جلد ٤ صفحات ۸۵ تا ۱۱٦ به‌چاپ رسیده است.

کندی E

KENNEDY, E.S.: **«A Fifteenth - Century Lunar Eclipse Computer»**, Scripta Mathematica, vol. 17, 1951, pp. 91-97.

کندی I

KENNEDY, E.S. **«An Islamic Computer for planetary latitudes»**, Journal of the American Oriental Society, N. 71, 1951, pp. 13-21.

کندی L

KENNEDY, E.S. : «A letter of Jamshid al - Kashi to his father, Scientific research and personalities at a fifteenth century court», Orientalia NS, vol. 29, 1960, pp. 191-213

این مقاله را متأسفانه در اختیار نداشته واز آن استفاده نکرده‌ام ولی چون در متن به‌آن اشاره کرده‌ام نامش دراینجا ثبت شد.

کندی P

KENNEDY, E.S. : «The Planetary Equatorium cf Jamshid Ghiyath al - Din al Kashi», Princeton University Press, 1960.

کندی T

KENNEDY, E.S. : «A Fifteenth - Century Planetary Computer al—Kashi's «Tabaq al - Manateq» : I. Motion of the Sun and Moon in Longitude. II. Longitudes, Distances and Equations of Planets», Isis, vol. 41, 1950, pp. 180 - 183 - Isis, vol 43, 1952, pp. 42-50.

کندی Z

KENNEDY, E.S : «A Survey of Islamic Astronomical Tables», Transactions of the American Philosophical Society, vol. 46, 1956.

گاندز G

GANDZ, Solomon : «**The Origin of Ghubar Numeral, or The Arabian Abacus and Articuli**», Isis, vol. 16,1931, pp. 393 - 424 .

لب‌التواریخ

لب‌التواریخ : تألیف **یحیی‌بن‌عبداللطیف قزوینی**، ضمیمهٔ گاهنامهٔ سال ۱۳۱۰ (توسط سیدجلال‌الدین طهرانی) .

لوکی A

LUCKEY, Paul : «**Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomischce Lehrsatz in der islamischen Mathematik**», Math. Annalen, vol. 120 (1948) , pp. 217-274 .

لوکی L

LUCKEY, Paul: «**Der Lehrbrief über den Kreisumfang**», Adhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1950, Nr. 6, Berlin, 1953 .

لوکی R

LUCKEY, Paul : «**Die Rechenkunst bei Gamsid b. mas ud al-Kasi, mit Rückbliken auf die altere Geschichte des Rechnens**» , Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandas, XXX I, I, Wiesbaden, 1951 .

(نوشتن این کتاب را **لوکی** درسال ۱۹۴۴ به‌پایان رسانیده بود ولی به‌علت جنگ جهانی دوم پس‌از مرگش درسال ۱۹۵۱ به‌چاپ رسید) .

دوست گرامی جناب آقای **دکتر هوشنگ طالع** درسال ۱۳۳۶ هـ.ش. هنگامی

که در آلمان مشغول تحصیل بودند ترجمه‌ای فارسی از این کتاب به‌خواهش حقیر فراهم آوردند و امیدوارم در آینده آن ترجمه پس‌از تصحیح وتکمیل به‌چاپ‌برسد .

لوی و پتروك

LEVEY, M.–PETRUCK, M.: «**Kushiyar ibn Labban, Principles of Hindu Reckoning**» A translation with introduction and notes of the Kitab fi usul Hisab al-Hind, Madison and Milwaukee, 1965 .

محیط : تعلیقات

محیط‌طباطبائی ، محمد : «**تعلیقات ، برنامهٔ غیاث‌الدین**» ، مجلهٔ آموزش و پرورش ، سال دهم ، ۱۳۱۹ ، ش ۳ ص ۵۸ تا ۶۲

محیط : غیاث‌الدین

محیط طباطبائی،محمد : «**غیاث‌الدین‌جمشید‌کاشانی**»، مجلهٔ آموزش‌وپرورش سال دهم ، ۱۳۱۹ ، ش۳ ص ۱ تا ۸ و نیز سال دهم ، ش ٤ ص ۱۷ تا ۲٤ - یا به‌نقل از آن مجله در «لغت نامه» ، ذیل مقالهٔ «غیاث‌الدین جمشید» .

محیط : نامه

محیط طباطبائی، محمد : «**نامهٔ پسر به‌پدر ، به‌قلم غیاث‌الدین‌جمشید‌کاشانی**» مجلهٔ آموزش و پرورش ، سال دهم ، ۱۳۱۹ ، ش ۳ ص ۹ تا ۱٦ وص ۵۷

محیطیه

رسالهٔ محیطیه : تصنیف غیاث‌الدین جمشید‌کاشانی . عکس نسخهٔ خطی

موجود در آستانهٔ قدس رضوی (فهرست مشهد، ج ۳ فصل ۱۷ ص ۵۲ ش ۱۶۲)
که به خط دست مؤلف است - ونیز رجوع کنید به رزنفلدویوشکویچ درهمین فهرست.

مصاحب: جبر ومقابلهٔ خیام

مصاحب، دکتر غلامحسین: «**جبر ومقابلهٔ خیام به انضمام تاریخ علوم ریاضی**» چاپ تهران، ۱۳۱۷ ه.ش.

مصاحب: حکیم خیام

مصاحب، دکتر غلامحسین: «**حکیم عمرخیام بعنوان عالم جبر**»، چاپ تهران، ۱۳۳۹ ه.ش. شمارهٔ ۳۸ از سلسلهٔ انتشارات انجمن آثار ملی.

مفتاح

مفتاح الحساب: تألیف **غیاث الدین جمشید کاشانی**، چاپ سنگی تهران ۱۳۰۶ ه.ق. بضمیمه رسالهٔ «نزهةالحدائق» وذیل آن.

میرم چلبی

میرم چلبی، محمودبن محمد: «**دستور العمل وتصحیح الجدول**» نسخهٔ عکسی شمارهٔ ۲۳۴۶ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران. این نسخهٔ عکسی از روی نسخهٔ خطی شمارهٔ ۸۴۸-۹ کتابخانهٔ حمیدیهٔ استانبول تهیه شده است.

وپکه A

WOEPCKE,F. : «**L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publieé, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits**» Paris , 1851 .

ویپکه C

WOEPCKE, F. : **«Analyse et extrait d'un recuil de constructions géometriques par Aboûl Wafâ»** , Jourual asiatique, 5^{e} série, tome 5, pages 218 - 256 , 1855 .

ویپکه D

WOEPCKE, F. : **«Discution de deux methodes arabes pour déter - miner une valeur approchée de sin 1°»** , Journal de math. pures et appliquecs , tome 19 , 1854 , pp. 153 - 303 .

ویپکه P

WOEPCKE, F. : **«Passages relatifs à des sommations de séries de cubes»** , Rome , 1864 .

ویپکه R

WOEPCKE, F. : **«Sur une mesure de la circonférance du cercle , due aux astronomes arabes, et fondée sur um calcul d'Aboûl Wafâ»** , Journal asiatique, 5m série , tome 15, pp. 281-320 .

ویپکه T

WOEPCKE, F. : **«Traduction d'un traité d'arithmétique d'Aboul Hasan Alkalsadi»** , Extrait des Atti dell' Accademia Pontifica de' Nuovi Linci , Tomo XII , 1859 .

هانکل G

HANKEL, H. «**Zur Geschichte der Mathematik**», Leipzig, 1874 .

هفت اقلیم

تذکرهٔ هفت اقلیم : تألیف امین احمدرازی ، با تصحیح جواد فاضل ، چاپ تهران ، کتابفروشی علمی ـ ونیز نسخهٔ خطی شمارهٔ ۱۹۱۷ کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران .

همائی : خیامی‌نامه

همائی ، جلال‌الدین : «**خیامی‌نامه**» ، جلد اول ، سلسلهٔ انتشارات انجمن آثار ملی شمارهٔ ۵۵ ، تهران ۱۳۴۶ .

هیث : آثار ارشمیدس

HEATH, T.L. : «**The Works of Archimedes**», New york .

هیث : سیزده مقاله

HEATH, T.L. «**The Thirteen book of Euclid's Elements** », 3 vols. , New York, 1956 .

یوشکویچ G

JUSCHKEWITSCH,A.P, :«**Jeschichte der Mathematik im Mittelalter**» Leipzig, 1964 .

یوشکویچ وروزنفلد

A. P. JUSCHKEWITSCH - B. A. ROSENFELD : «**Die Mathematik der Lander des Ostens im Mittelalter**» Berlin, 1963 .

فهرست

عمومی الفبایی

دراین فهرست مطالب واصطلاحات باحروف سیاه واعلام و اسامی کتابها و رسالات با حروف متن کتاب چاپ شده و برای آنکه اسامی کتابها و رسالات و مجلات از اعلام ممتاز باشد در دنبال نام هرکتاب یا رساله نوع آن را درپرانتز نوشته‌ایم .

← علامت ارجاع است

حرف « ذ » اشاره به ذیل صفحات است : ۲۰۱ ذ = ذیل صفحهٔ ۲۰۱

اعدادی که با ارقام سیاه چاپ شده نمایندهٔ صفحاتی‌ازکتاب است که عنوان موردبحث درآنها جامعتر تعریف شده است .

علامت (+) حاکی ازاین‌است که عنوان موردنظر هم درمتن و هم در ذیل صفحه آمده است.